

改进的最大最小特征值之差的频谱感知算法

赵知劲, 胡伟康

(杭州电子科技大学 通信工程学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 针对传统的最大最小特征值之差的频谱感知算法(DMM), 从提高特征值估计精度出发, 引入了信号矩阵拆分重组的过程, 提出了一种改进的协作频谱感知算法(IDMM)。该算法在逻辑上增加了协作用户数, 降低了协作用户数对频谱感知性能造成的影响。理论分析和仿真结果均表明, IDMM 算法性能明显优于 DMM 算法。

关键词: 频谱感知; 随机矩阵理论; 最大最小特征值之差; 拆分重组

中图分类号: TN925

文献标识码: A

文章编号: 0258-7998(2014)08-0119-03

Improved spectrum sensing algorithm based on DMM

Zhao Zhijin, Hu Weikang

(Telecommunication School, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to enhance the performance of the difference between the maximum and the minimum eigenvalue (DMM) algorithm, an improved cooperative sensing algorithm (IDMM) based on heightening the estimation accuracy of eigenvalue is presented in this paper. By the decomposition and recombination of the sensing signals, which increase the number of logic signals, the proposed algorithm exhibits a good robustness against the short of cooperation users. Theoretical analysis and simulations all show that the performance of the proposed method is superior to that of the DMM algorithm.

Key words: spectrum sensing; random matrix theory; difference between the maximum and the minimum eigenvalue; decomposition and recombination

认知无线电 CR(Cognitive Radio)^[1]允许认知用户 SU(Secondary User)利用授权主用户 PU(Primary User)的空闲频段进行通信, 可以提高频谱利用率, 而频谱感知是认知无线电的关键技术之一。目前, 频谱感知方法主要有循环平稳特征检测、匹配滤波器检测和能量检测 ED(Energy Detection)等方法。但是这些经典频谱感知方法都有各自特定的应用场合和缺陷^[2], 例如需要预先知道 PU 的先验信息, 对噪声的不确定性敏感等。

针对上述缺陷, 利用随机矩阵理论 RMT(Random Matrix Theory)的频谱感知技术引起国内外学者的关注, 迅速成为当前的研究热点, 提出了多种基于 RMT 的频谱感知算法。参考文献[3]提出了最大最小特征值 MME(Maximum Minimum Eigenvalue)算法, 参考文献[4]提出了最大最小特征值之差 DMM(Difference between Maximum and Minimum eigenvalue)算法, DMM 比 MME 具有更好的检测性能。但在协作用户较少的情况下, DMM 性能有待提高, 对此, 本文提出了改进的 DMM 算法, 对感知信号进行拆分重组, 增加协作用户的逻辑个数, 提高了 DMM

算法在较少协作用户情况下的性能。

1 理论基础

考虑多径衰落信道下的频谱感知, $h(n)$ 代表了发射机与接收机之间的信道衰落函数, 则 SU 采样信号 $x(n)=h(n)s+w(n)=s(n)+w(n)$, s 代表 PU 发射信号, $s(n)$ 代表发射信号经过信道衰减后接收到的信号, $w(n)$ 是加性高斯白噪声。假设感知过程中有 M 个 SU, 每一个 SU 对接收信号采样 N 次, 则第 i 个 SU 在 k 时刻的采样信号、接收信号及噪声分别表示为 $x_i(k)$ 、 $s_i(k)$ 和 $w_i(k)$ 。

定义 $M \times N$ 维采样信号向量矩阵 $X=[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_M]^T$, 其中, $x_i=[x_i(1) \ x_i(2) \ \cdots \ x_i(N)]^T$ ($i=1, 2, \dots, M$) 表示第 i 个 SU 采样得到的信号向量。相应的定义背景噪声向量矩阵为 W , PU 发射信号经过信道衰减后接收到的信号向量矩阵为 S 。频谱感知过程可以看作为一个二元假设检验过程, SU 对 PU 发射机信号进行检测的结果存在两种可能, 建立假设检验模型如下:

$$X = \begin{cases} W & H_0 \\ S+W & H_1 \end{cases} \quad (1)$$

假设噪声 \mathbf{W} 是均值为 0、方差为 σ^2 的高斯白噪声。当 PU 发射信号不存在时, \mathbf{S} 为 0, 则式(1)可以统一表示为 $\mathbf{X}=\mathbf{S}+\mathbf{W}$ 。根据 PU 发射信号与噪声统计独立, 可得接收信号的统计协方差矩阵为:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x &= E(\mathbf{XX}^T) = E(\mathbf{SS}^T) + E(\mathbf{WW}^T) \\ &= \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w = \mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M\end{aligned}\quad (2)$$

其中, \mathbf{I}_M 为单位矩阵。定义如下采样协方差矩阵: $\hat{\mathbf{R}}_x = \mathbf{XX}^T/N$, $\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{SS}^T/N$, $\hat{\mathbf{R}}_w = \mathbf{WW}^T/N$ 。

假设信号与噪声是平稳遍历, 则当 $N \rightarrow \infty$, 可以得到如下关系式, $\mathbf{R}_x = \hat{\mathbf{R}}_x(N) = \hat{\mathbf{R}}_s(N) + \hat{\mathbf{R}}_w(N)$, 即当 $N \rightarrow \infty$ 时, 信号协方差矩阵的统计平均等于采样平均。当 PU 发射信号不存在时, $\hat{\mathbf{R}}_x(N) = \hat{\mathbf{R}}_w(N)$, 此时噪声协方差矩阵为 Wishart 随机矩阵, 该随机矩阵的联合概率密度函数表达式非常复杂, 但是根据参考文献[5-6], 其最大最小特征值的特性可由如下定理描述。

定理 1 当噪声为实信号时, 令 $\mathbf{A}(N) = \frac{N}{\sigma^2} \hat{\mathbf{R}}_w(N)$ 、 $v = (\sqrt{N-1} + \sqrt{M}) \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}} + \frac{1}{\sqrt{M}} \right)^{\frac{1}{3}}$, 以及 $u = (\sqrt{N-1} + \sqrt{M})^2$; 假设 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = c$ ($0 < c < 1$), 则 $\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}(N)) - u}{v}$ 依概率 1 收敛于 1 阶 Tracy-Widom 分布 $F_1(t)$, 其中 $\lambda_{\max}(\mathbf{A}(n))$ 表示随机矩阵 $\mathbf{A}(N)$ 所对应的最大特征值。

定理 2 根据 M-P 律, 当 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = c$ ($0 < c < 1$) 时, $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \approx \sigma^2(1 - \sqrt{c})^2$ 。

2 改进的 DMM 频谱感知算法

2.1 检验统计量的确定及判决准则^[4]

令矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_x(N)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_s(N)$ 的最大特征值为 λ_{\max} 和 ρ_{\max} , 根据式(1)和式(2)可得, 当存在 PU 信号时, 接收信号协方差矩阵的最大特征值为 $\rho_{\max} + \sigma^2$, 不存在时为 σ^2 ; 而无论 PU 信号存在与否, 接收信号协方差矩阵的最小特征值都为 σ^2 。利用矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_x(N)$ 的最大最小特征值之差作为检验统计量, 得到基于接收信号相关矩阵特征值的 DMM 算法, 设检验统计量为 $T_{\text{DMM}} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ 。

将 T_{DMM} 作为判决统计量, 判决门限设为 γ_{DMM} , 算法性能取决于 γ_{DMM} 的设置。根据以上分析, DMM 算法的判决准则为:

- (1) 当 $T_{\text{DMM}} \geq \gamma_{\text{DMM}}$ 时, 检测到 PU 信号, 判决 H_1 成立;
- (2) 当 $T_{\text{DMM}} < \gamma_{\text{DMM}}$ 时, 未检测到 PU 信号, 判决 H_0 成立。

2.2 IDMM 算法

基于定理 1 和定理 2, DMM 算法的虚警概率 P_f 可以表示为:

$$P_f = \Pr(T_{\text{DMM}} \geq \gamma_{\text{DMM}} | H_0) = \Pr\left(\frac{\sigma^2}{N} \times \lambda_{\max}(\mathbf{A}(N)) - \lambda_{\min} > \gamma_{\text{DMM}}\right)$$

$$= 1 - F_1\left(\left(\frac{N}{\sigma^2} \times (\gamma_{\text{DMM}} + \lambda_{\min}) - u\right)/v\right) \quad (3)$$

因此, DMM 算法的理论门限值为:

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{DMM}} &= \frac{\sigma^2}{N} [v F_1^{-1}(1 - P_f) + u] - \lambda_{\min} \\ &= \sigma^2 \left\{ \frac{1}{N} [v F_1^{-1}(1 - P_f) + u] - (1 - \sqrt{c})^2 \right\} \quad (4)\end{aligned}$$

可得 DMM 算法的门限与噪声 σ^2 有关。根据随机矩阵理论, 估计噪声方差 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i - \lambda_{\max} \right)$ 。

由于 DMM 算法的检测统计量 T_{DMM} 和门限值 γ_{DMM} 都与信号自相关矩阵的最大特征值和最小特征值估计有关, 最大特征值和最小特征值由 PU 信号的最大特征值 ρ_{\max} 和噪声方差 σ^2 决定, 而 ρ_{\max} 和 σ^2 的估计又与协作用户数 M 和采样点数 N 有关, 协作用户数 M 和采样点数 N 越多, 能够获得的信号信息越多, 对 ρ_{\max} 和 σ^2 估计越准确, 因此检测性能越好。

基于上述分析, 在采样点数 N 和协作用户数 M 一定的情况下, 本文将信号拆分成多个子信号, 在总的数据量不变的前提下, 增加了用户的逻辑个数, 以获得更多的信号相关信息, 提高 DMM 算法在较少协作用户情况下的性能, 提出了 IDMM 算法。

在 IDMM 算法中, 将 \mathbf{x}_i ($i=1, 2, \dots, M$) 拆分成 q ($q > 0$) 段 $k=N/q$ 长的子信号向量, 将拆分后的信号向量进行重组, 则可以得到一个 $(qM) \times k$ 维的信号矩阵 \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{1q} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{im} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{Mq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1((q-1)k+1) & x_1((q-1)k+2) & \cdots & x_1(qk) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_i((m-1)k+1) & x_i((m-1)k+2) & \cdots & x_i(mk) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_M((q-1)k+1) & x_M((q-1)k+2) & \cdots & x_M(qk) \end{bmatrix} \quad (5)$$

第 1 节中的定理 1 与定理 2 成立的前提是相比于协作用户数 M , 采样点数 N 趋向于无穷大, 即 N 远大于 M 。为了在 IDMM 算法中能继续应用上述定理, 对矩阵 \mathbf{Y} 定义如下限制: 拆分后的信号矩阵需满足 $k > qM$ 。

将上述拆分后的矩阵 \mathbf{Y} 表示成向量形式 $\mathbf{Y} = \mathbf{S}' + \mathbf{W}'$, 其中 $\mathbf{S}' = [s_{11}, \dots, s_{jm}, \dots, s_{Mq}]^T$, $\mathbf{W}' = [w_{11}, \dots, w_{jm}, \dots, w_{Mq}]^T$ 。对于矩阵 \mathbf{Y} , 任取两个向量 $\mathbf{x}_{im}, \mathbf{x}_{jn}$ 做相关检测, 则有:

$$\mathbf{R}_{im \times jn}(k) = E(\mathbf{x}_{im} \mathbf{x}_{jn}^T) = E(s_{im} s_{jn}^T) + E(w_{im} w_{jn}^T) \quad (6)$$

当 $j=i, m=n$ 时, 此时为自相关检测; 不相等时为互相关检测, 此时 $\mathbf{R}_{im \times jn}(k) = E(w_{im} w_{jn}^T)$ 。互相关检测消除了噪声的自相关性对信号的影响, 其性能要优于自相关检测。

\mathbf{Y} 的协方差矩阵 $\mathbf{R}_Y = E(\mathbf{YY}^T) = E(\mathbf{S}' \mathbf{S}'^T) + E(\mathbf{W}' \mathbf{W}'^T) = \mathbf{R}_{s'} + \sigma^2 \mathbf{I}_{qM}$, 定义矩阵 \mathbf{Y} 的采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_Y = \mathbf{YY}^T/k$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 信号协方差矩阵的统计平均等于采样平均 $\mathbf{R}_Y = \hat{\mathbf{R}}_Y(k)$ 。

比较矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_x(k)$ 和 $\hat{\mathbf{R}}_y(k)$ 可以发现, IDMM 算法在逻辑上增加了协作用户数, 从算法上克服了协作用户数少对检测性能造成的影响。协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_y(k)$ 除对角线元素为自相关函数值外, 其他都为互相关函数值, 且矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_y(k)$ 维度扩大了 q 倍, 增加了感知信号子信号间的互相关信息, 所以能够进一步提高 DMM 检测性能。

综上所述, IDMM 算法主要步骤如下: 按照式(5), 对 $x_i (i=1, 2, \dots, M)$ 进行拆分重组, 获得 $(qM) \times k$ 维矩阵 Y ; 对矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_y(k)$ 进行特征值分解, 求得最大最小特征值, 得到判决统计量 $T_{\text{DMM}} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$; 估计噪声方差, 由式(4)计算得到门限 γ_{DMM} ; 最后根据判决准则进行检测。

3 算法仿真及结果分析

本节仿真分析算法性能, 主用户信号采用经过升余弦脉冲成型的 QPSK 调制信号。假设用户数 $M=4$, 虚警概率 $P_f=0.05$, 5 000 次的 M-T 模拟仿真各种算法。图 1 是不同 q 值情况下门限 γ_{DMM} 随采样点数 N 变化的理论值与仿真值曲线。从图可见随着采样点数 N 的增加, 理论值与仿真值都趋于稳定。因为对门限值的理论推导过程中, 最小特征值采用的是极限值, 导致门限 γ_{DMM} 的理论值与仿真值有一定偏差, 但是随着采样点数的增加, 最小特征值逐渐逼近理论值, 因此 γ_{DMM} 理论值与仿真值的偏差也越来越小, 这与图 1 中随着 N 的增加, 理论值与仿真值的曲线接近重合是一致的。表 1 是当采样点数 N 为 8 500 次时, 不同 q 值情况下的理论门限值与仿真门限值, 从表 1 中可以得到, 当采样点数足够大时, 门限仿真值近似等于理论值, 且随着 q 值的增加, 两者之间的偏差越来越小, 验证了算法理论分析的正确性。

当采样点数 $N=3 000$, q 值分别取 2、3、4、5 时, 算法

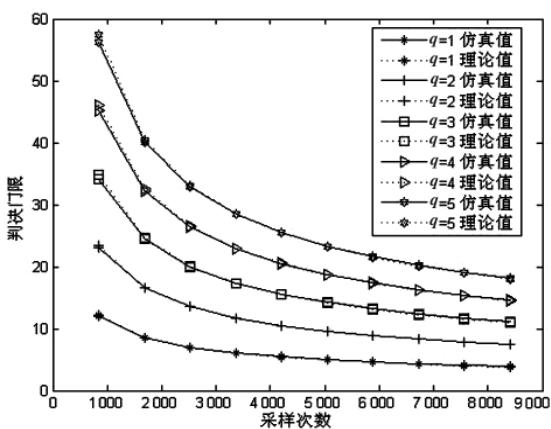


图 1 门限仿真值与理论值

表 1 $N=8 500$ 门限理论值与仿真值

q 值	1	2	3	4	5
仿真值	3.893	7.525	11.116	14.708	18.268
理论值	3.854	7.461	11.043	14.616	18.182
比值	1.011	1.009	1.007	1.006	1.004

的检测性能如图 2 所示。由图 2 可见, 随着 q 值的增加, 检测性能逐步提高。例如当信噪比为 -15 dB 时, DMM 算法的检测概率为 0.3, 而 4 次拆分后的 IDMM 算法检测概率达到了 1。上述结果验证了算法理论分析的正确性, 充分表明了 IDMM 算法的优越性。进一步分析图 2 可以看出, 当 q 值再增加时, 检测性能提高幅度越来越小。这与理论分析是相符的, 在式(5)中对拆分后的矩阵 Y 定义过 $k >> qM$ 的限制条件, 所以拆分次数有限的, 当拆分次数超过一定范围后, 不能继续应用定理 1 和定理 2 的结论。

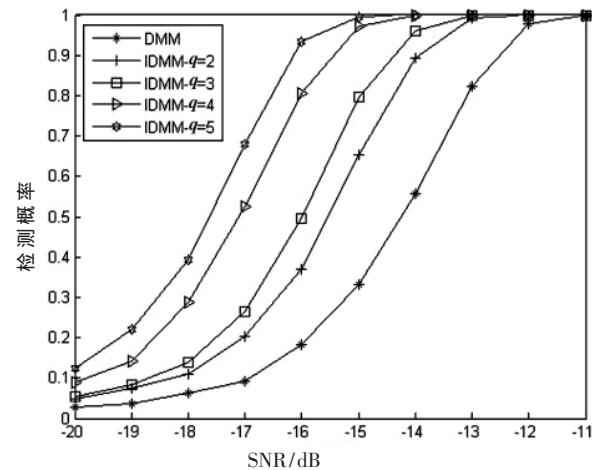


图 2 不同 q 值下 IDMM 算法检测概率

下面对不同算法的检测性能进行比较, 在 IDMM 算法中, q 取 2。由于 ED 算法与噪声不确定度有关, 为了便于比较, 假设 $\sigma^2=1$ 固定不变, 采样点数 $N=3 000$, 4 种算法的检测概率与信噪比之间的关系如图 3 所示。由图可见, 随着信噪比的增加, 4 种算法的性能均有提高, 但 IDMM 算法的检测性能明显优于其他 3 种检测算法。

本文从提高特征值估计精度出发, 根据 DMM 算法的理论基础, 对接收信号矩阵拆分重组, 提出了 IDMM 算法。理论分析与实验仿真均表明, 该算法延续了 DMM 算法优点, 即感知性能不受噪声不确定度的影响, 无需

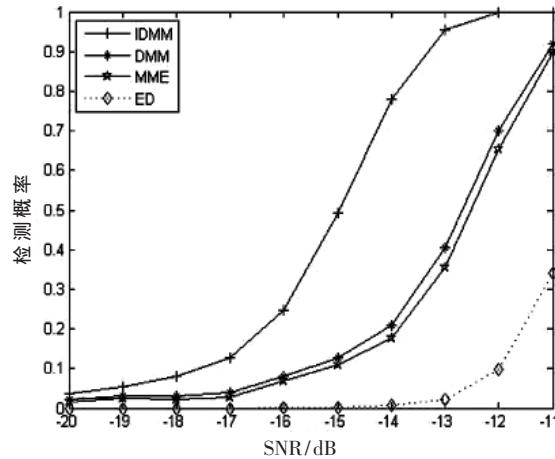


图 3 4 种算法性能比较

(下转第 125 页)

(上接第 121 页)

知道主用户的信息,同时检测性能优于 DMM 算法,而算法复杂度与 DMM 算法相同。

参考文献

- [1] MITOLA J, MAGUIRE G Q. Cognitive radio: making software radios more personal[J]. IEEE Personal Communications, 1999,6(4):13–18.
- [2] 李转,任旭虎. 基于信任度函数的认知无线电频谱感知算法研究[J]. 电子技术应用, 2012,38(6):108–114.
- [3] Zeng Yonghong, Liang Yingchang. Eigenvalue-based spectrum sensing algorithms for cognitive radio[J]. IEEE Transactions on Communications, 2009,57(6):1784–1793.
- [4] 王颖喜, 卢光跃. 基于最大最小特征值之差的频谱感知技术研究[J]. 电子与信息学报, 2010,32(11):2571–2575.
- [5] JOHANSSON K. Shape fluctuations and random matrices[J]. Communications in Mathematical Physics, 2000,209(2):437–476.
- [6] JOHNSTONE I M. On the distribution of the largest eigenvalue in principle components analysis [J]. The Annals of Statistics, 2001,29(2):295–327.

(收稿日期: 2014-03-06)

作者简介:

赵知劲,女,1959年生,博士,教授、博士生导师,主要研究方向:认知无线电、通信信号处理、自适应信号处理等。
胡伟康,男,1990年生,硕士研究生,主要研究方向:认知无线电及频谱感知算法。