

第一章 引言——数字图像处理

1.1 图像的重要性

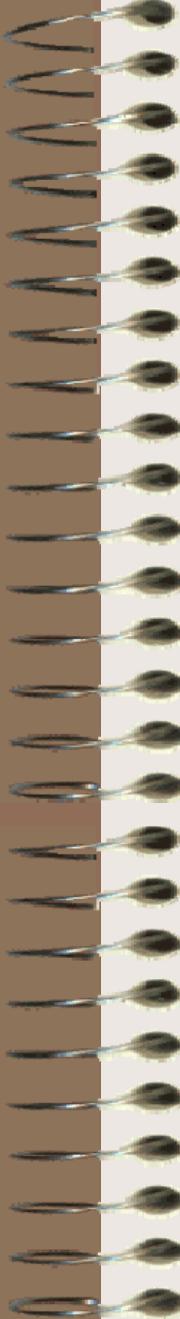
人类离不开图像，计算机图像技术渗透到各个科技领域，百闻不如一见。画面比文字更形象生动，人类70%信息来自视觉。

21世纪信息技术时代，卫星通讯、数据传输、压缩、计算机网络、多媒体、人工智能等技术都离不开图象。

图象处理识别的过程：

人类： 一幅图象 —— 图上有字 —— 中文字含义

计算机： 采集 —— 分析 —— 识别（判断）



一、图象处理是交叉边缘学科：

是计算机、传感器、信息技术、信号处理、人工智能、模式识别、应用对象等的交叉学科和技术。

二、图象处理分类：

模拟图像处理——实时光学（实时，速度快）但只是有限处理）

如：望远镜、显微镜、哈哈镜、透镜、胶片合成照相、凸透镜——实时FFT变换

计算机图像处理：图象处理技术是随着计算机处理速度和数据量增加发展起来的。第①阶段：科学计算，有限个原始数据；第②阶段：数据管理应用；第③阶段：数字图像处理。如一幅卫片spot星 $8000 \times 8000 \times 7$ (波段)= $64M \times 7$ (数据量之大少见之)

三、图像技术应用：

我国发射卫星中，80%左右属军事侦察。如96年科学卫星实际上也是军事侦察。

微机普及——图像民用、普及、计算机成熟是图像技术普及应用基础。

数字图象处理技术已应用到各个领域，以下举几个例子：

1. 遥感图像：农业普查、森林覆盖计算、水利工程等的客观估计、计算。
2. 石油管线铺设：周期短、效率高。
3. 应用遥感图像技术可普查北京市垃圾有多少。

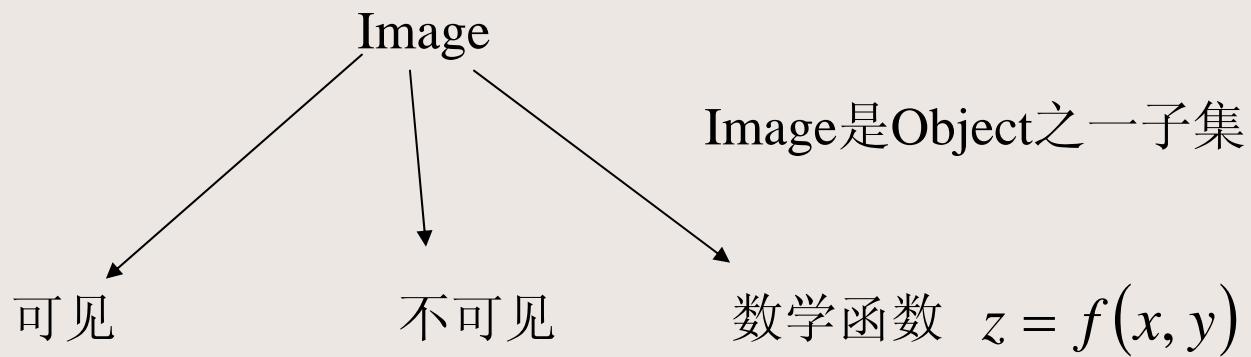
4. 森林火灾监护——客观反映火灾情况、面积。
5. 巡舰弹：图象识别技术应用于导弹的精确未制导，使其精确打击目标。如：机场、桥梁等。
6. 军事、公安、安全：指纹、掌纹、虹膜等识别。
7. 医学应用：CT、MRI、PET、B超、DSA、血管造影、红外乳腺、显微病理、电子显微镜、远程医疗图像、皮肤图象、X线、 γ 刀与x刀脑外科等等离不开图像。
8. 工业图像：X线控探伤（轴）、X线检察、三维测量（定位、形状测量）机器人视觉、商检。
9. 民用：数码相机、数字视频、照片扫描、计算机逻辑管理等。

1.2 图像处理的内容

一、图像的定义：

客观对象（物体）一种仿真的或模拟的描述，一种生动的图形表述。

图像指广义的概念：

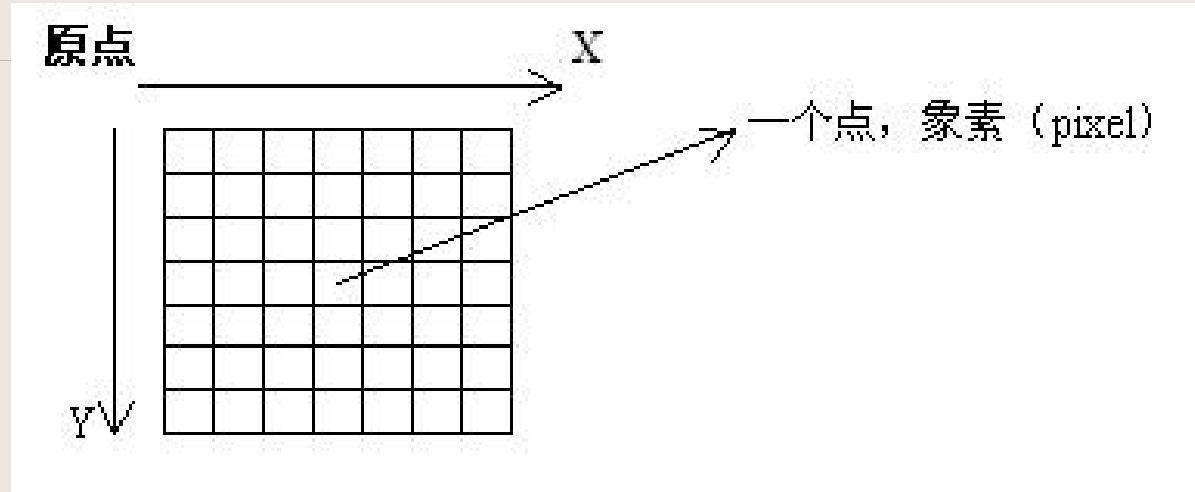


光学 画面 照片 可测量的物理量

温度压力等曲线

二、数字图像数学模型：

一幅数字图象可描述为如下模型： (picture element = pixel)



抽象为数字矩阵：

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & & f_{NN} \end{bmatrix}$$

f: 代表该象素彩色或灰度值；脚码代表象素的坐标位置。

三、数字化：

由模拟照片到数字图象的过程。

采样：将图象分成离散的（横竖均匀的）网格点。

量化：将图象上各个网格点的黑白及彩色程度做数字量化，如：256级，由0到255，亮度从黑到白变化，人眼仅能分辨50左右级灰度。

人眼分辨率远远小于目前仪器设备分辨率，但图像质量最终判别依据是人。几何：80点/mm，黑白：12bit——4096层（人眼仅看40多层）

四、处理：

经过一系列操作得到所需结果。

$$\phi(x, y) = G(f(x, y)) \quad x \in [0, 511] \quad y \in [0, 511]$$

①点处理： $\phi(x, y)$ 与原始数据 $f(x, y)$

②局域处理： $\phi(x, y)$ 与原始数据 $f(x, y)$ 及其邻域

③全局处理： $\phi(x, y)$ 与原始数据 $f(x, y)$ 及全图

处理包括如下几类：

①图像预处理——改善象质，以便于目视判读。

校正技术：对形状变形的图象进行几何校正、辐射校正。

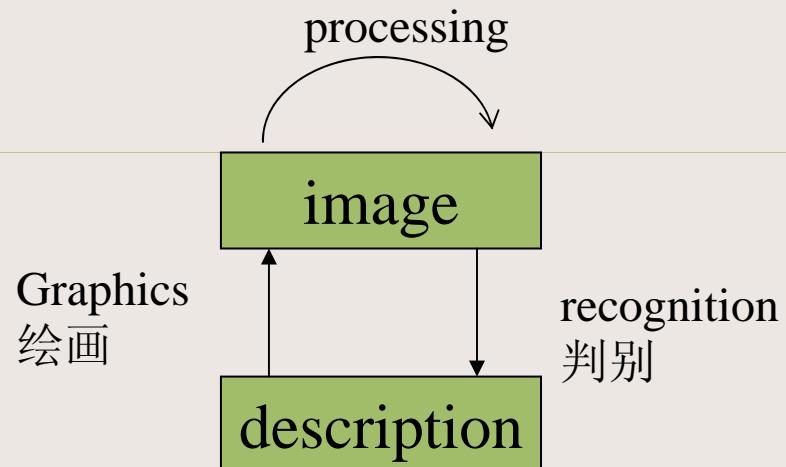
增强技术：去除干扰，突出主要特征，包括：平滑与锐化技术。

恢复技术：忠实原图，去除干扰，恢复原图像，实用中往往干扰复杂，模型不清，难能准确恢复。

②图像分析（测量）（analysis）：密度（灰度）、平面几何参数，三维参数测量技术。

③图像识别（recognition）：模式识别与景物分析

图形学与图像处理广义上讲密切相关。



二者之间许多基础是相同的，只不过研究角度不同，服务对象不同，产生社会效益不同。

1.3 图像处理的特点：

- 再现性好：数字图像可多次拷贝，不失真，不退化。
- 精度高：采样量化一定，多次处理可保精度。
- 适用面宽：可处理抽象数据、可做非线性处理（光学只作线性处理）

1.4 图象的数据格式

从数据组织角度来谈图像数据基本格式，而不是从人的感受角度来谈。

四类用紧凑程度不同的表达方式：

①灰度的彩色图象：

灰度级：0~255， 1字节/pixel

彩色： R G B $2^{24}=16M$ 真色彩

0~255 0~255 0~255 3字节/pixel

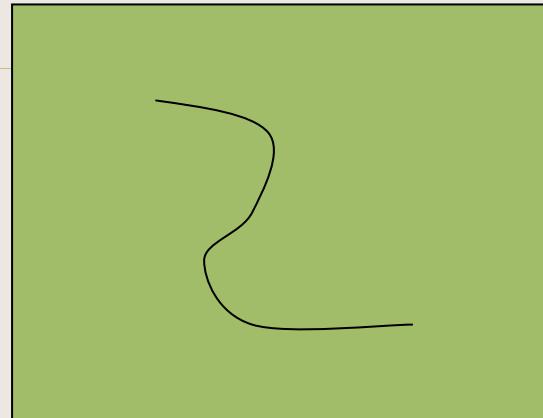
彩色R(红)叫一个波段，对单一波彩可看作灰度图像。

关于各种标准图像格式：Tiff、BMP、TAG、GIF、DXF、JPG等不介绍。

②二值图像：黑或白 1bit/pixel

③连续曲线：

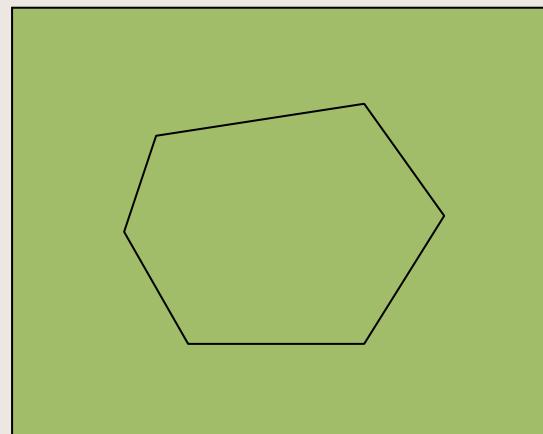
仅保留黑的连续点坐标。



④ 多边形：

vector仅保留直线端点。

存贮数据量由①—④
逐渐降低。



突出介绍③

- 点序列：存储各点（X,Y）坐标。
- 点序列增量：起点（X,Y）

增量 $(\Delta x, \Delta y)$

0, ± 1 ± 1

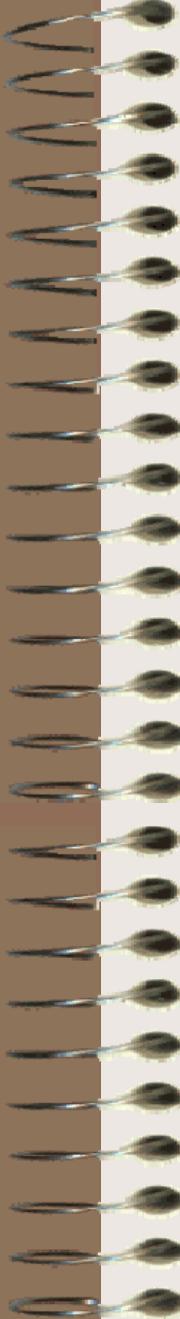
2bits 2bits

·编码链：

增量用3bits表示0~7

3	2	1
4	X	0
5	6	7

·差分编码链：



1.5 视觉现象

客观存在是不变的，而人的感觉是与周围环境有关的，人感觉是会变的。

①人眼对亮度的适应能力：

人眼的适应亮度范围很宽 10^{10} (最大与最小之差)

光强度量用勒克斯： Lux 0.02Lux CCD黑白

太阳光度:白天10000Lux

同时识别亮度范围很有限的：（适应的范围宽，同时识别范围窄）。如从亮屋到黑屋什么都看不见（需适应20~30秒），从黑屋到白屋适应较快（仅需1~2秒）。

光强客观是存在的，主观感觉是以光强的对数成线性关系（正比）的。

②同时对比度：

人眼对亮度有适应能力，因此很难判别亮度绝对值。即使相同亮度，但若背景亮度不同，人眼的主观感觉的亮度亦不一致。

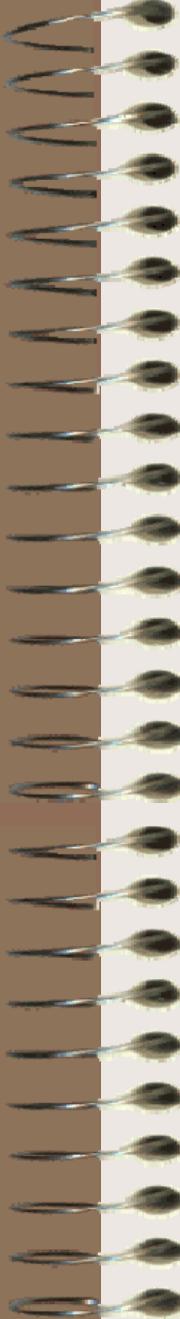


③ 对比灵敏度：

人眼刚能分辨光强差别 ΔI 与背景光强 I 的关系 $\Delta I/I$ 。在相当范围内为0.02（50层），但当 I 很大或很小时比值加大。

解释：256级灰度，8bits，计算机处理方便

8bits→6bits眼睛感觉不到。



④ 分辨率

空间二相邻视觉信号，人能辨别出二者存在的能力称视觉系统的分辨率。清晰3-5对/度。

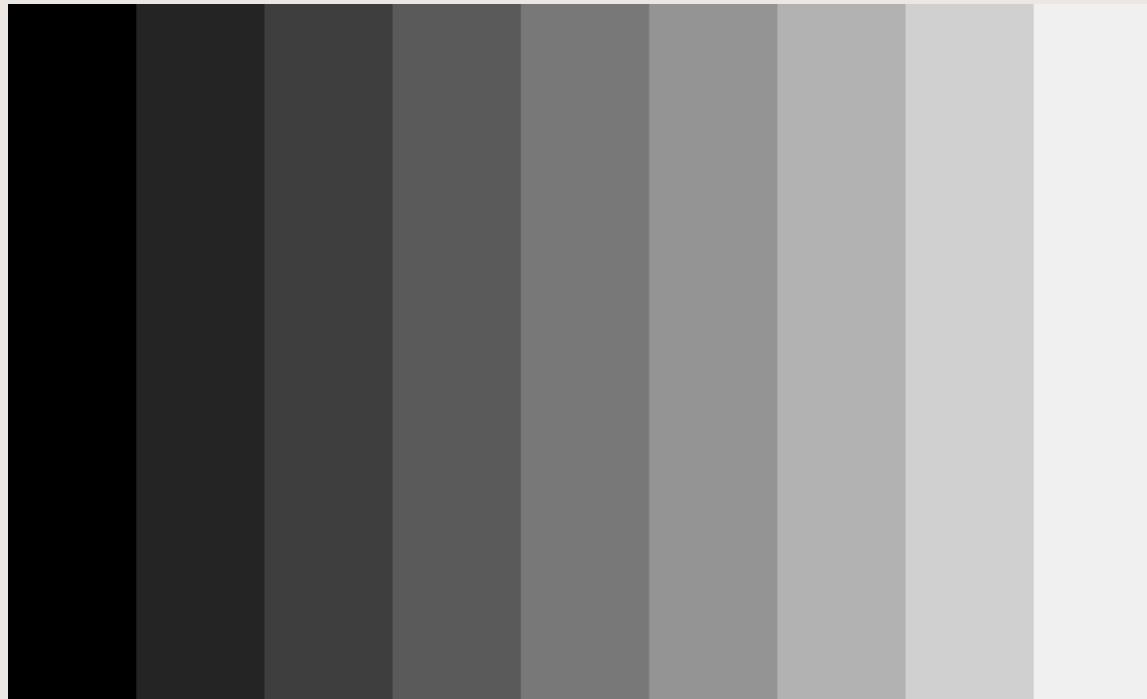
>20周/度，不能识别。

或者说一个毫弧度 $57.3/1000 \sim 1/20$

⑤ Mach带(马赫带现象)

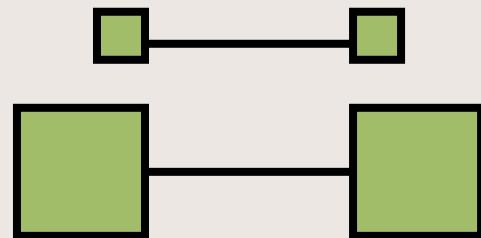
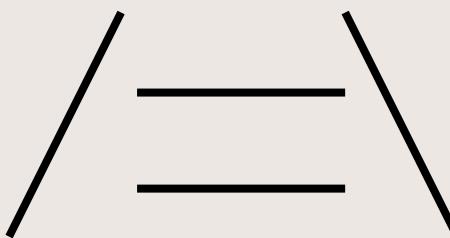
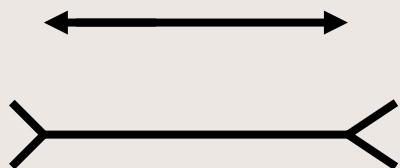
人眼在观察均匀黑区与白区形成边界时，与实际情况不一致，即在亮度变化部位附近有暗区更暗，亮区更亮的感觉。这一更黑和更亮的带叫Mach带。

主观感觉相当于增加了一个分量，相当于原图进行了二阶导数操作。

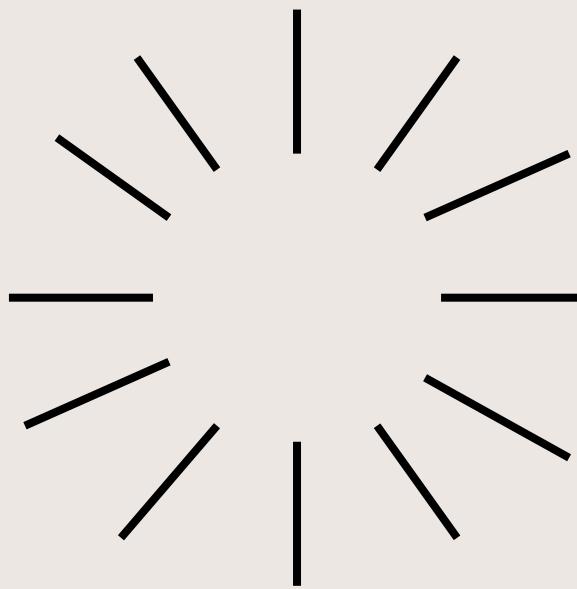


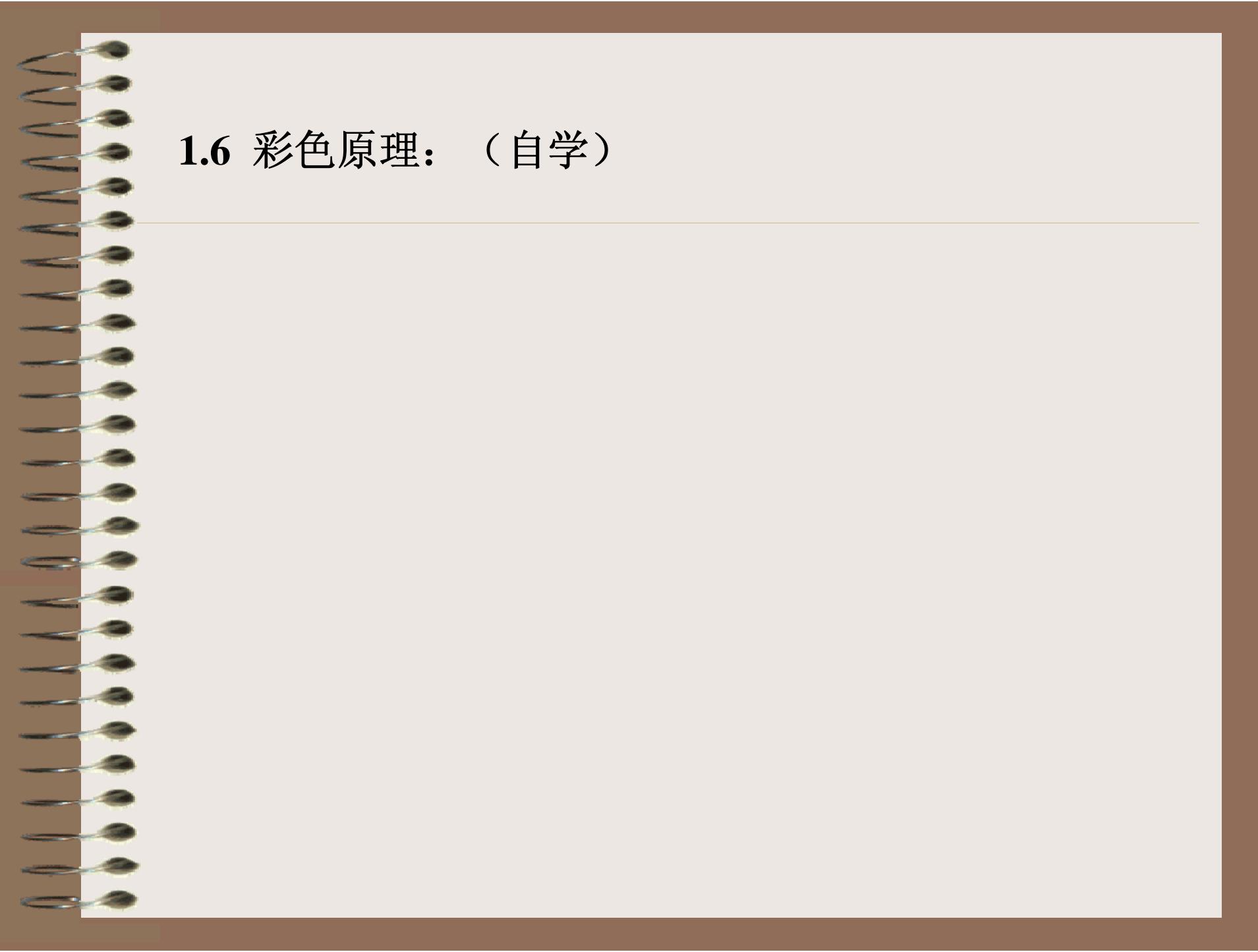
⑥ 空间错觉：

人带有主观经验性错觉。



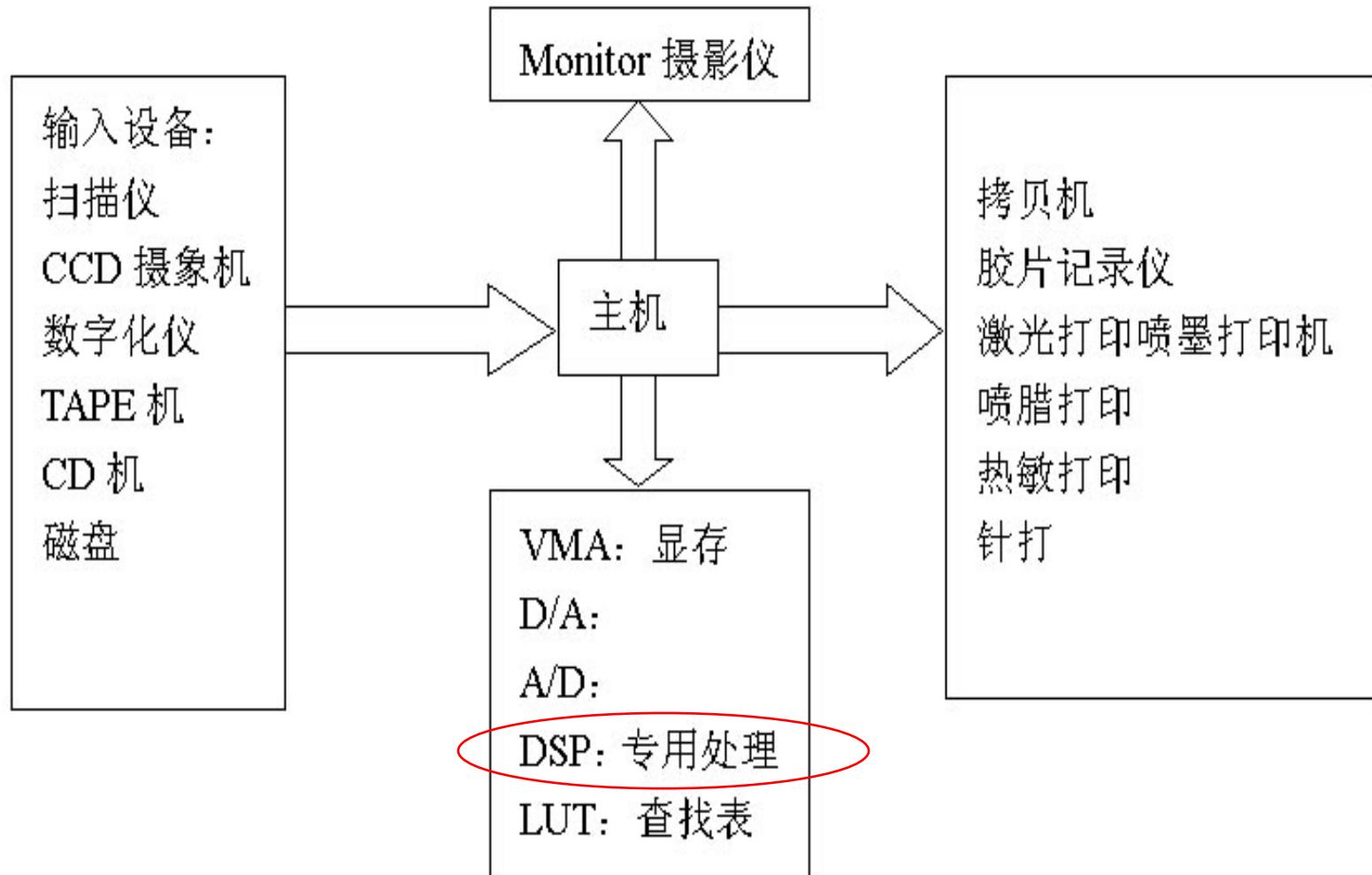
⑦ 主观轮廓





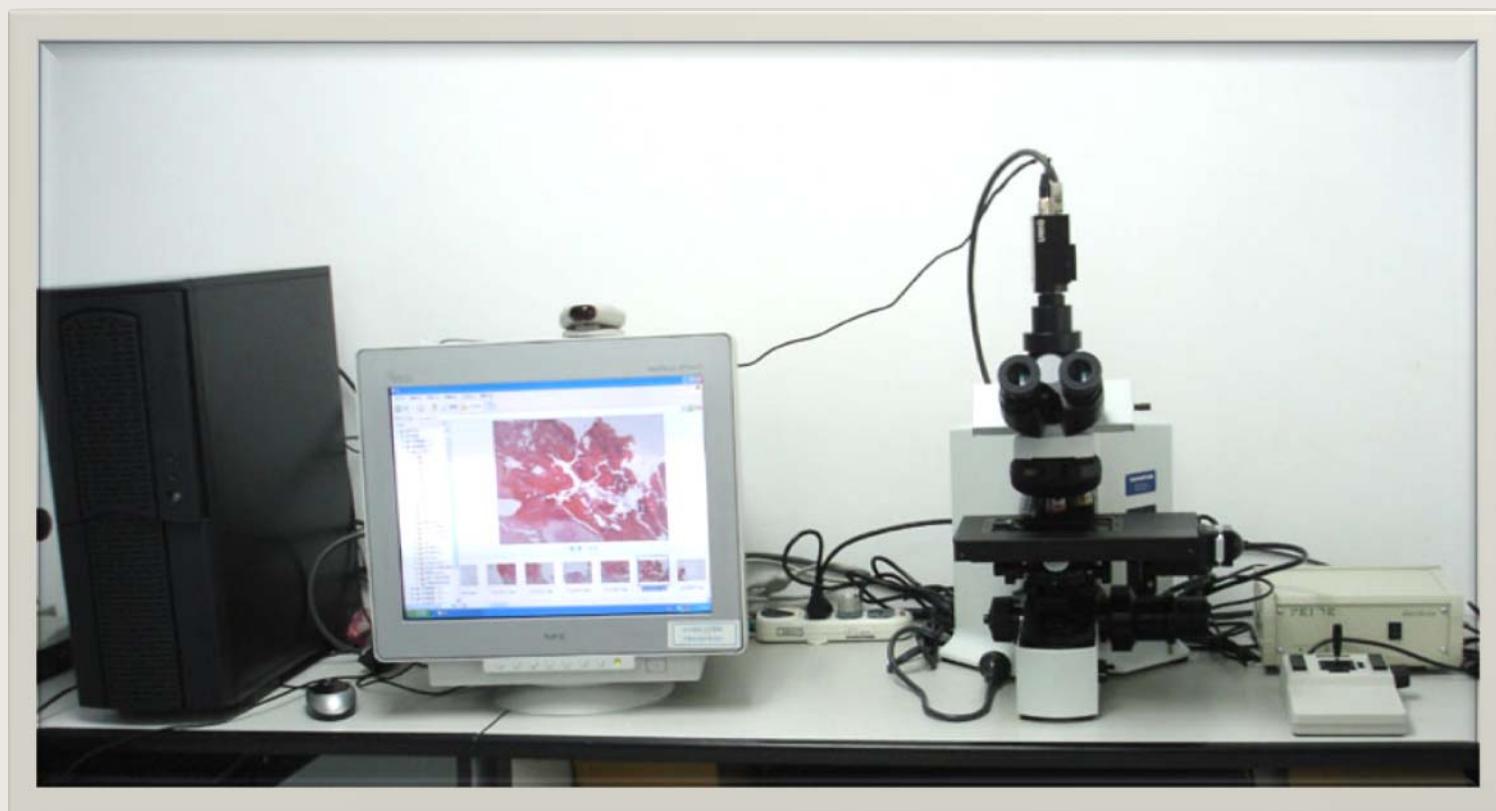
1.6 彩色原理: (自学)

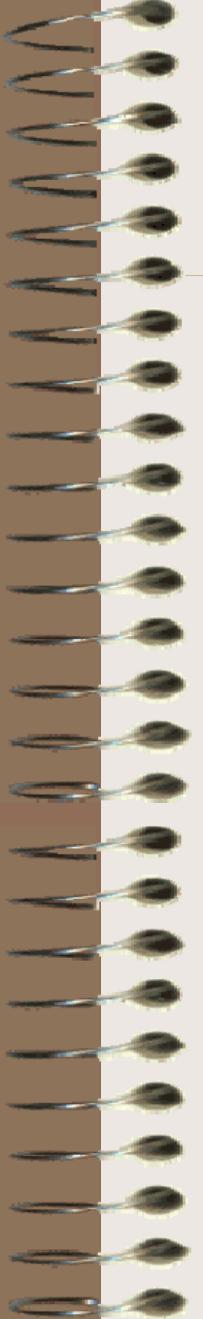
1.7 图像处理系统框图



- 图像处理系统软件应用举例

——显微细胞测量问题





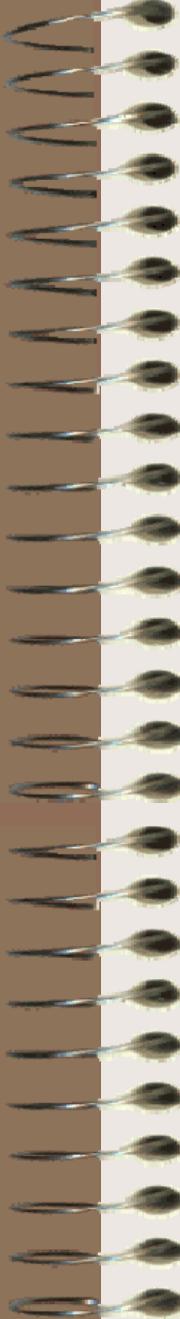
作业一

- 自学“彩色原理”
- “CCD成像原理”
- “视觉生理现象”等内容。

讲义下载:

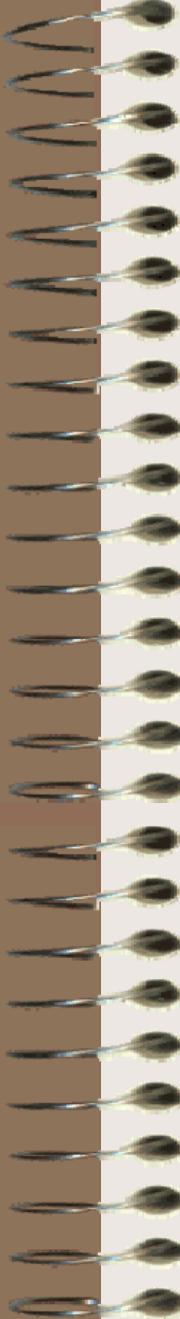
Email: image_processing@126.com

密码: 111111



参考书：

- 1、数字图像处理,朱志刚等译,Kenneth.R.Castleman著, 电子工业出版社, 1998。
- 2、数字图像处理, Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods著, 阮秋琦等译, 电子工业出版社 (第二版)。
- 3、图象工程:图象处理和分析, 章毓晋, 清华大学出版社,1999。
- 4、图像处理、分析与机器视觉, Image Processing, Analysis, and Machine Vision second edition, MILAN SONKA, VACLAV HLAVAC, ROGER BOYLE,人民邮电出版社, 2002年1月。
- 5、DIGITAL IMAGE PROCESSING, Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods, 1992.
- 6、W.K.普拉特(W. K. Pratt),“数字图像处理学”, 科学出版社1984
- 7、A. Rosenfield and A. kaka,“Digital Picture Processing”1982 Academic Press Inc.
- 8、T. Pavlidis,“Algorithms for Graphics and Image Processing”1982 Computer Science Press



图像领域相关学术组织

1、中国图象图形学会
《中国图象图形学报》杂志

<http://www.csig.org.cn>



2、中国体视学学会 《中国体视学与图像分析》杂志

投稿：

北京海淀区清华大学工物馆113室，邮政编码
100084，《中国体视学与图像分析》编辑部

EMAIL: tscss@mail.tsinghua.edu.cn

教师：

姜志国 823338061

jiangzg@buaa.edu.cn

谢凤英 823339972

单位：宇航学院图像中心

新主楼D座409, 407室

讲课方式：

课堂讲授 + 专题报告 + 自学+软件编程

考核：

作业(%) + 考试(%)



第二章 有关数学基础

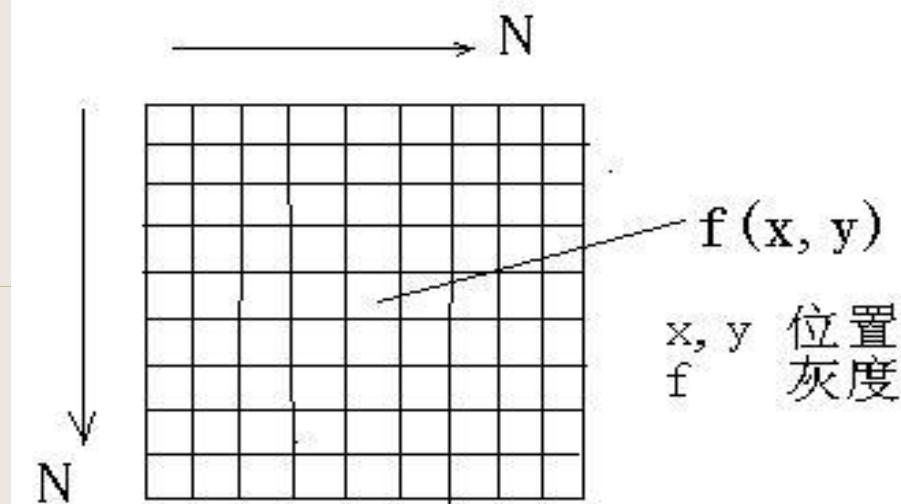
两方面问题：

抽象

物理现象——> 数学模型

数学工具：解决实际问题

$$[f] = \begin{vmatrix} f_{(1,1)} & f_{(1,2)} \cdots f_{(1,N)} \\ f_{(2,1)} & f_{(2,2)} \cdots f_{(2,N)} \\ \vdots & \vdots \\ f_{(N,1)} & f_{(N,2)} \cdots f_{(N,N)} \end{vmatrix}$$



处理可看作是对矩阵进行变换。

矢量→图像也可看作

变换→增强, 特征提取, 数据压缩

采样与量化→模拟的转换成数字的

正交矩阵: $A' = A^{-1}$

，转置 -1 逆

酉矩阵: $(A^*)' = A^{-1}$

* 共轭

2.1 图像的向量表示：

二维图像矩阵

$N \times N$ 象素

表示成矢量
形式为：

$$\text{矢量 } \bar{f} = \begin{vmatrix} f_{(1,1)} \\ f_{(2,1)} \\ \vdots \\ f_{(N,1)} \\ f_{(1,2)} \\ \vdots \\ f_{(N,2)} \\ \vdots \\ f_{(1,N)} \\ \vdots \\ f_{(N,N)} \end{vmatrix}$$

$$[f] = \begin{vmatrix} f_{(1,1)} & f_{(1,2)} \cdots f_{(1,N)} \\ f_{(2,1)} & f_{(2,2)} \cdots f_{(2,N)} \\ \vdots & \vdots \\ f_{(N,1)} & f_{(N,2)} \cdots f_{(N,N)} \end{vmatrix}$$

矩阵和矢量间关系：

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^N [A_n][f] \bar{V}_n \quad (n=k \text{ 时提取第 } k \text{ 列理解})$$

$$[f] = \sum_{n=1}^N [A_n]^1 \bar{f} \bar{V}_n^1$$

当输入输出图像均为向量表示时，则处理之可表示为：

$$\bar{g} = [T] \bar{f}$$

此处 \bar{g} 和 \bar{f} 可能不同维数

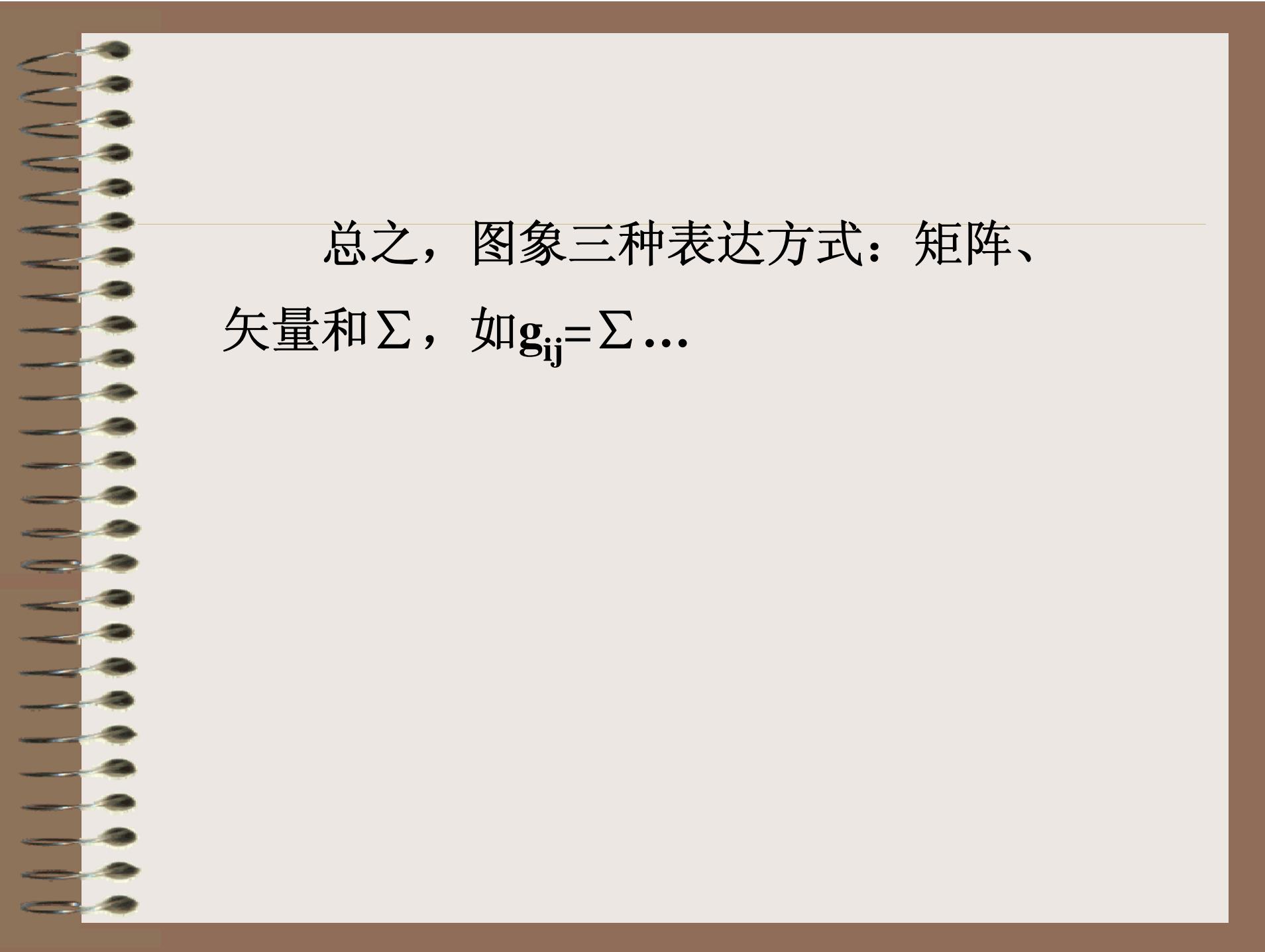
如: $M^2 \times 1$ $N^2 \times 1$

[T]为 $M^2 \times N^2$

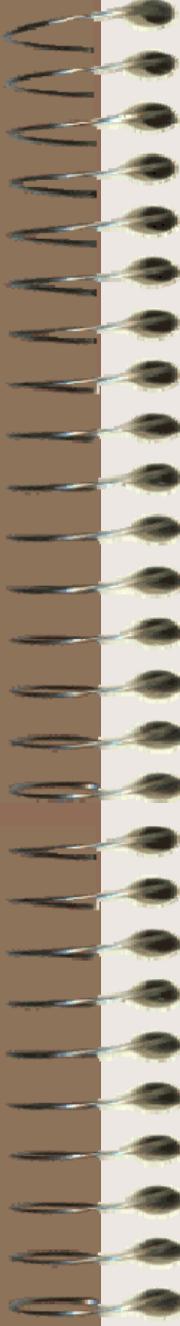
也可表示为:

$$\bar{g}(p \cdot q) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N t(p, q, m, n) \cdot f(m, n)$$

其中: $p=1 \dots M, q=1, 2 \dots M$



总之，图象三种表达方式：矩阵、矢量和 Σ ，如 $g_{ij}=\Sigma \dots$



2.2 随机场——图像的统计表示

一幅图像并不是全图各部分特征相同，相同无信息，不同才有信息，任一图像特征为随机的。且全场各部分间亦非均匀（随机的）不存在全图统一的特征。

图像可作为二维随机场中一个样本来分析常是必要的。在某些场合使用确定的表示来描述图像有困难，然而用平均特性能方便地描述，如描述纹理结构图象可能很方便。图像为实函数，只讨论二维实随机场。

二维随机场：仅一个时间变量函数，一维随机过程。
图象为二维实随机场。

一个图象完备集包含所有图象，任一图像可看作其中一个样本，图像集可看作随机场，在此集中某一象素亮度 f_i 随 x, y 而变化；

对确定的 (x_0, y_0) 其值又随 i 而变化 (i 为第 i 幅图)，即任一点 $f_i(x_0, y_0)$ 均为随机变量，每一点均有统计特性来描述。

随机场中特定 (x_0, y_0) 为一随机变量，对场上所有 (x, y) ，不一定具有相同的统计特性，即 $f(x, y)$ 之分布函数与 (x, y) 密度函数有关。

令 $P\{f(x, y) < z\}$ 代表 $f(x, y) < z$ 之概率，

随机变量 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处分布函数 表为：

$$\varphi(z; x, y) = P\{f(x, y) < z\}$$

f(x,y)在 (x,y) 处密度函数：

$$\phi(z; x, y) = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial z}$$

类似地总体平均特征：

随机场均值函数（各点均值不同）

$$m_f(x, y) = E\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot \phi(z; x, y) dz$$

在 (x,y) 处均值是 (x,y) 的
函数

方差函数：

$$\delta_f^2(x, y) = E\{[f(x, y) - m_f(x, y)]^2\}$$

自相关函数：

$$\begin{aligned} R_{ff}(k, l; m, n) &= E\{f(k, l), f(m, n)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int z_1 z_2 \phi(z_1 z_2, k l m n) dz_1 dz_2 \end{aligned}$$

二阶联合密度
函数

互相关函数：

$$R_{fg}(k, l, m, n) = E\{f(k, l), g(m, n)\}$$

2.3 正交变换：（图像中多数为此变换）

一个实函数或复函数若用 $x(t)$ 表示，其定义域为 (t_0, t_0+T) 在此区间可展开为：

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \phi_m(t)$$

若： $\int_T x(t) x^*(t) dt < \infty$ *共轭函数

并且： $\int_T \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt = \begin{cases} c & \text{当 } m = n \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } m \neq n \text{ 时} \end{cases}$



则 Φ_m 称正交函数，当 $c=1$ 时称标准正交函数。

图像处理中用到变换核均为正交函数。

变换是个工具，一个域特征不突出到另一个域则突出，信号处理中空域和频域之间的相互变换常用。

例如：

- Fourier 变换后的平均值，正比于图像的平均亮度，而高频分量可指示图像中边沿幅度和方向；
- 用于图像的变换编码的压缩频带，如对幅度小的变换系数或者丢弃，或者粗量化。
- 缩减计算维数，把 Hotelling 变换小幅度系数丢弃不用。

2.4 付氏变换

对图像函数 $f(x, y)$ ，其付氏正变换：

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

其反变换：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv$$

由反变换看物理意义，变换核：

$$\exp[j2\pi(ux + vy)] = \cos 2\pi(ux + vy) + j \sin 2\pi(ux + vy)$$

右图可见：

$\cos 2\pi(ux + vy)$ 之最大值之连线

沿： x轴单位长度上u周
y轴单位长度上v周

空间周期： $\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

$\sin 2\pi(ux + vy)$ 也类似，移动1/4周，可见：

$\exp[j2\pi(ux + vy)]$ 是二维周期分别为u, v之函数，

周期为： $\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

对x轴倾角为：

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{u}{v} \right)$$

可见逆变换的物理含义为： $f(x,y)$ 可看作 $\exp[j2\pi(ux + vy)]$ 型的线性组合。 $F(u,v)$ 即为权值函数。

由 x,y 间频率定空间分量为 u,v , 因此 $F(u,v)$ 称为 $f(x,y)$ 的频谱。

交待概念：

卷积： $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$

相关： $R_f(\tau) = f(t) * f(-t)$

互相关:

$$R_{fg}(t) = f(t)^* g(-t)$$

卷积定理:

$$F[f(x, y)^* g(x, y)] = F(u, v) \cdot G(u, v)$$

即:

两个函数的卷积的付氏变换 = 各自付氏变换的乘积

2.5 离散图像付氏变换(DFT)

离散图像

$$[f] = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) \dots f(0, N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) \dots f(1, N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & f(M-1, N-1) \end{bmatrix}_{M \times N}$$

变换可定义如下：

$$[F] = [p][f][Q]$$

$[p]$ 为 $M \times M$ $[Q]$ 为 $N \times N$

可展开之：

$$F(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} p(u, m) f(m, n) q(n, v)$$

$$u=0, 1 \dots M-1$$

$$v=0, 1 \dots N-1$$

[P]和[Q]为非奇异的。

对离散付氏变换：变换核 $[P]=[W_{MM}]$

$[Q]=[W_{NN}]$

对通用J,其 $[W_{JJ}]$ 的元为：

$$\frac{1}{J} \exp \left[- j \frac{2\pi}{J} m \right] \quad J=M \text{或} N$$

故离散付氏变换可写成：

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[- j 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right]$$

反变换：

$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[j 2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right]$$

这里：

$$\exp\left[j2\pi\left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N}\right)\right] = \exp\left[j2\pi\frac{mu}{M}\right] \cdot \exp\left[j2\pi\frac{nv}{N}\right]$$

当M=N时，即N×N图象。

令： $w = \exp\left[j\frac{2\pi}{N}\right]$

变换阵[P]、[Q]用W表示

$$\bar{w} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & \dots & w^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{vmatrix}$$

这里 w^n : $n=0 \sim (N-1)(N-1)$

周期性变化（为快速付氏变换提供基础）

注意到：

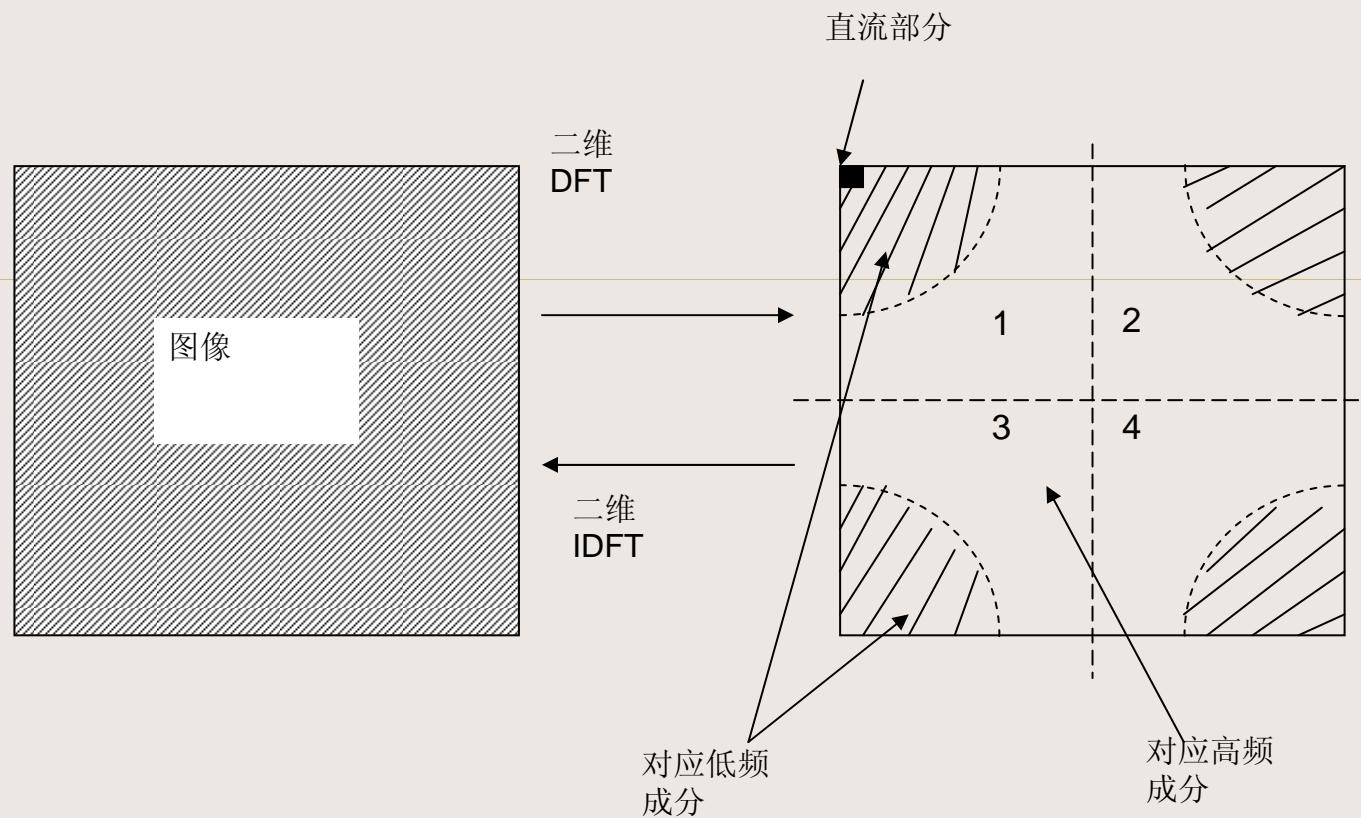
$$w^N = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N} \cdot N\right] = 1$$

$$w^{\frac{N}{2}} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}\right] = -1$$

$$w^{\frac{N}{4}} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{4}\right] = -j$$

$$w^{\frac{3N}{4}} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{3N}{4}\right] = j$$

\bar{w} 阵为对称、正交、二维可分离、可简化计算、快速变换的基础。

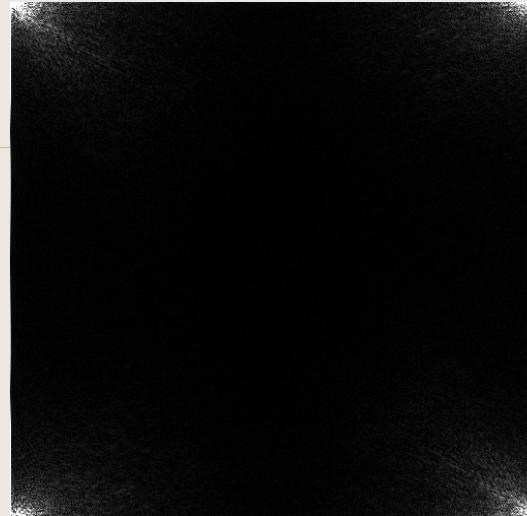


图像的二维离散傅立叶变换的频率成分分布示意图

变换结果的左上、右上、左下、右下四个角部分对应于低频成分，中央部分对应于高频成分。



(a) lenna图



(b) 傅氏变换的频谱图

图像及其频谱图像示意图

对于一幅图像，图像中灰度变化比较缓慢的区域对应较低的频谱，而灰度变化比较大的边缘地带对应较高的频谱。而且一幅图像中大部分都是灰度变化缓慢的区域，只有一小部分是边缘，因此，其变换域的图像，能量主要集中在低频部分（对应值较高），只有一小部分能量集中在高频部分（对应值较低）。

离散图像付氏变换性质

1、可分离性

二维傅立叶变换式可以分离成如下形式：

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi ux/N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \quad u, v = 0, 1, \dots, N-1$$

一个二维离散傅立叶变换可以先后两次运用一维傅立叶变换来实现。

$$F(x, v) = N \left[\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} \right] \quad v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$F(u, v) = N \left[\frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/N} \right] \quad u, v = 0, 1, \dots, N-1$$

2. 平移性

指将 $f(x, y)$ 乘以一个指数项相当于把其二维离散傅立叶变换 $F(u, v)$ 的频域中心移动到新的位置。

$F(u, v)$ 乘以一个指数项，就相当于把其二维离散傅立叶反变换 $f(x, y)$ 的空域中心移动到新的位置。

这个性质可以表示为：

$$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x+v_0y)/N} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)/N}$$

傅立叶变换的幅值不变：

$$\left| F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)/N} \right| = |F(u, v)|$$

将 $F(u, v)$ 的原点移到

$N \times N$ 方阵的中心, 以便能清楚地分析傅立叶变换谱的情况。
要做到这一点, 只需令:

$$u_0 = v_0 = N/2$$

则

$$e^{j2\pi(u_0x+v_0y)/N} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

可得:

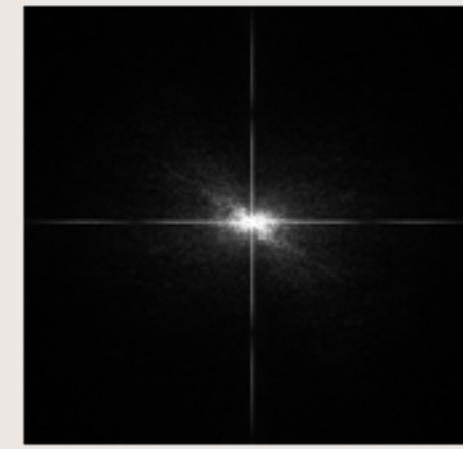
$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2}\right)$$



(a) x 图



(b) 无平移的傅立叶谱



(c) 原点移到中心的傅立叶谱

图像谱移示例

3. 周期性

傅立叶变换和反变换均以N为周期，即：

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N)$$

4. 旋转不变性

若引入极坐标使

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} u = \omega \cos \varphi \\ v = \omega \sin \varphi \end{cases}$$

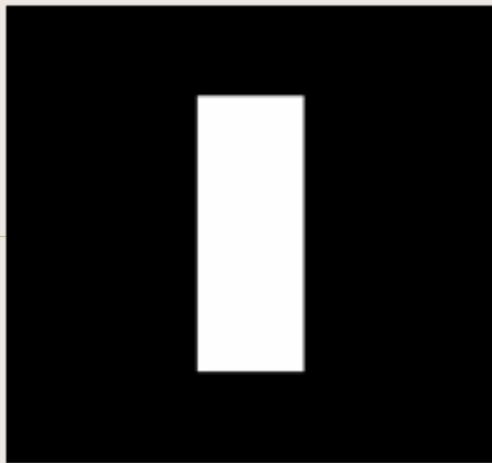
则 $f(x, y)$ 和 $F(u, v)$ 分别表示为 $f(r, \theta)$ 和 $F(\omega, \varphi)$ 。

在极坐标中，存在以下的变换对

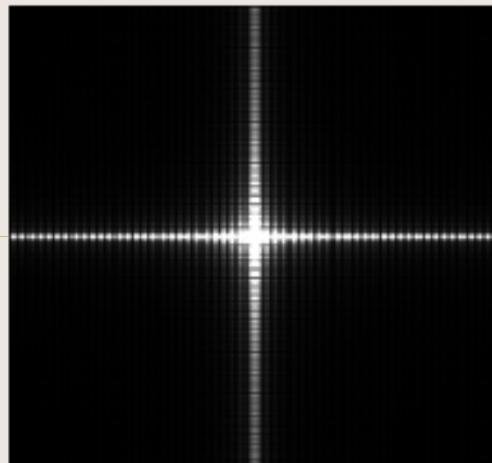
$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$

上式表明，如果 $f(x, y)$ 在空域旋转 θ_0 角度，则相应的傅立叶变换 $F(u, v)$

在频域上也旋转同一角度 θ_0 。



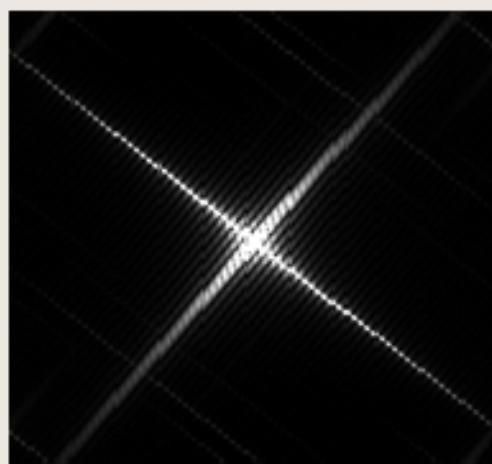
a) 原图像



b) (a)图的傅立叶频谱



c) 对(a)旋转后的图像



d) (a)图的傅立叶频谱

二维离散傅立叶变换的旋转不变性

5. 分配性和比例性

傅立叶变换的分配性表明傅立叶变换对于加法可以分配，而对乘法则不行。即

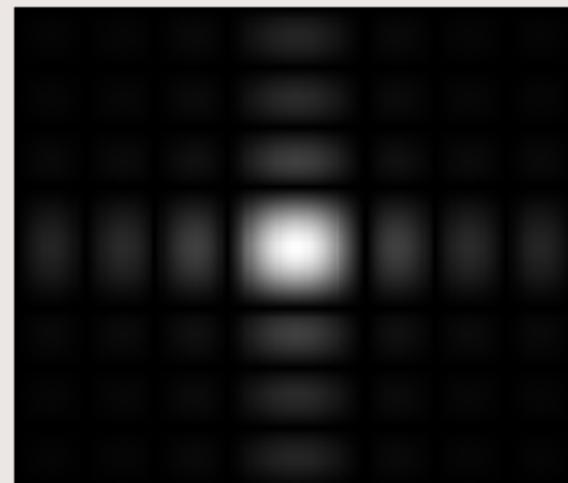
$$F\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = F\{f_1(x, y)\} + F\{f_2(x, y)\}$$

$$F\{f_1(x, y)f_2(x, y)\} \neq F\{f_1(x, y)\} \bullet F\{f_2(x, y)\}$$

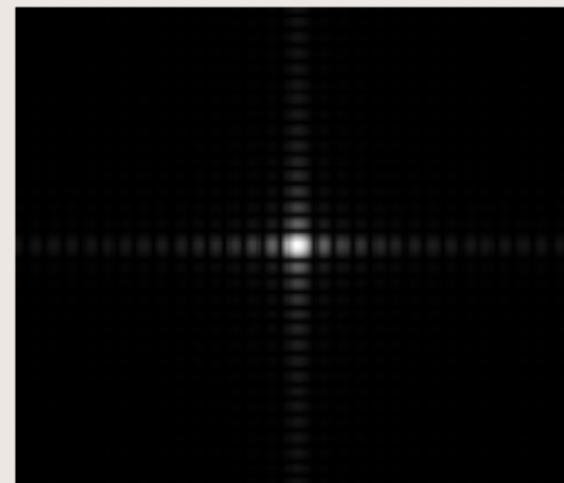
傅立叶变换的比例性表明为对于二个标量 a 和 b , 有:

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$



a) 比例尺度影响前的幅度



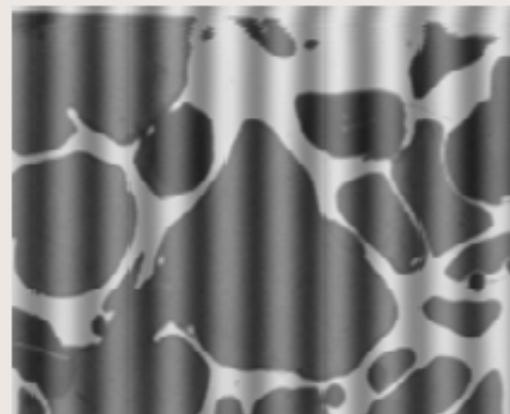
b) 比例尺度影响后的幅度

傅立叶变换的比例性

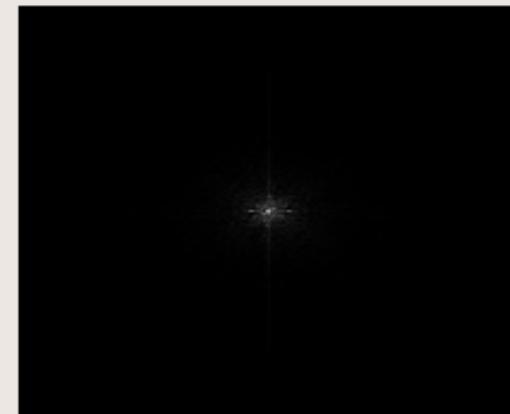
离散图像付氏变换应用

实例1

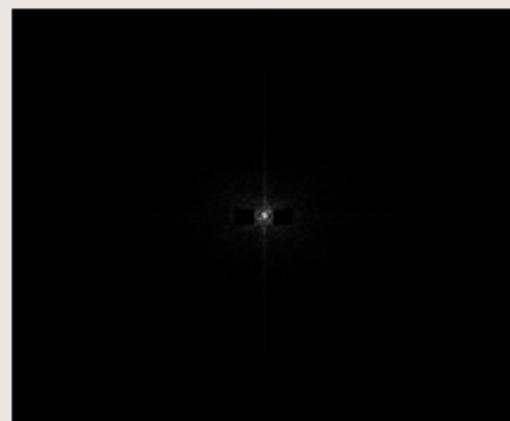
正弦波去噪



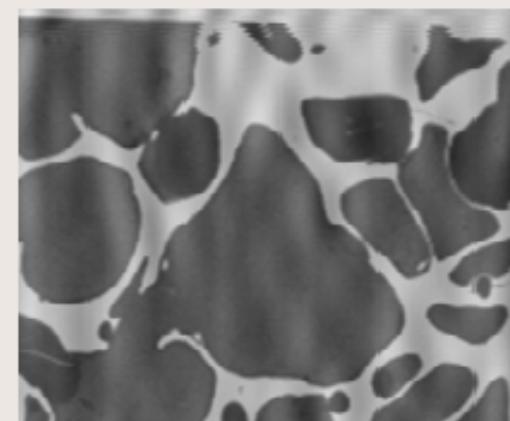
(a) 有僵格影响的原始图像



(b)傅立叶变换频谱图像



(c) 去除高频成分原始图像

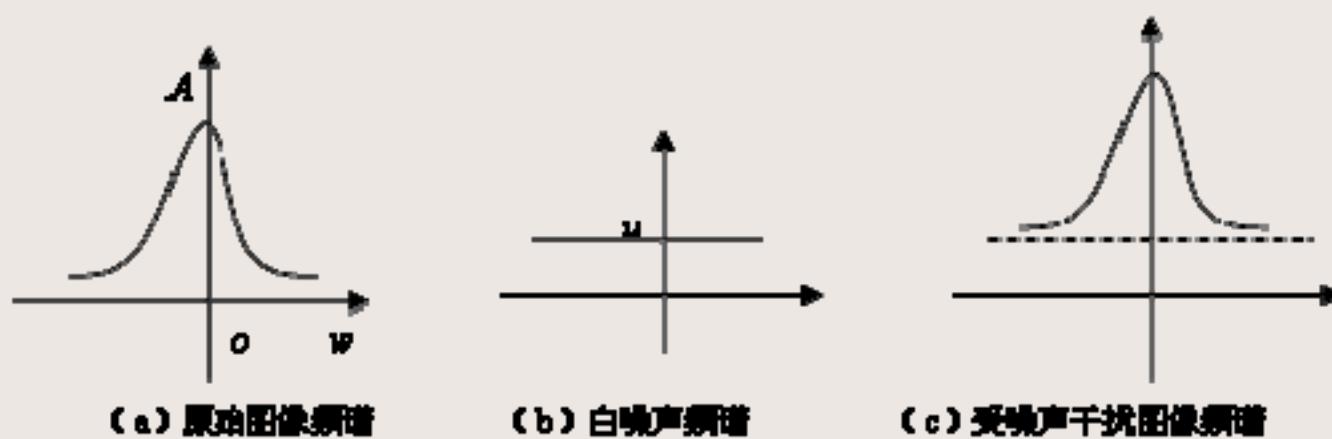


(d)傅立叶变换去噪图像

用傅立叶变换去除正弦波噪声示例

实例2 去噪实例

图像受白噪声干扰的原理如图所示，对于一幅不受白噪声干扰的图像，假设其频谱为图(a)所示的形式，其中横坐标为频率，纵坐标为幅值，对应低频部分幅值较高，高频部分幅值较低。对于高斯白噪声，其频谱如图(b)所示，其幅值是一个常数。那么当原始图像受到白噪声干扰时，它的频谱将变成(c)中的形式。



受高斯噪声干扰的频谱分析图

要去除图像中的白噪声，在频域中减去白噪声的幅值即可。

理想的方法：

知道白噪声的模型，一般情况下很难遇到。在未知噪声幅值的情况下，可以先对噪声图像求频谱，并计算频谱幅值的平均值，用该平均值作为噪声的近似幅值，就可以对图像去噪。

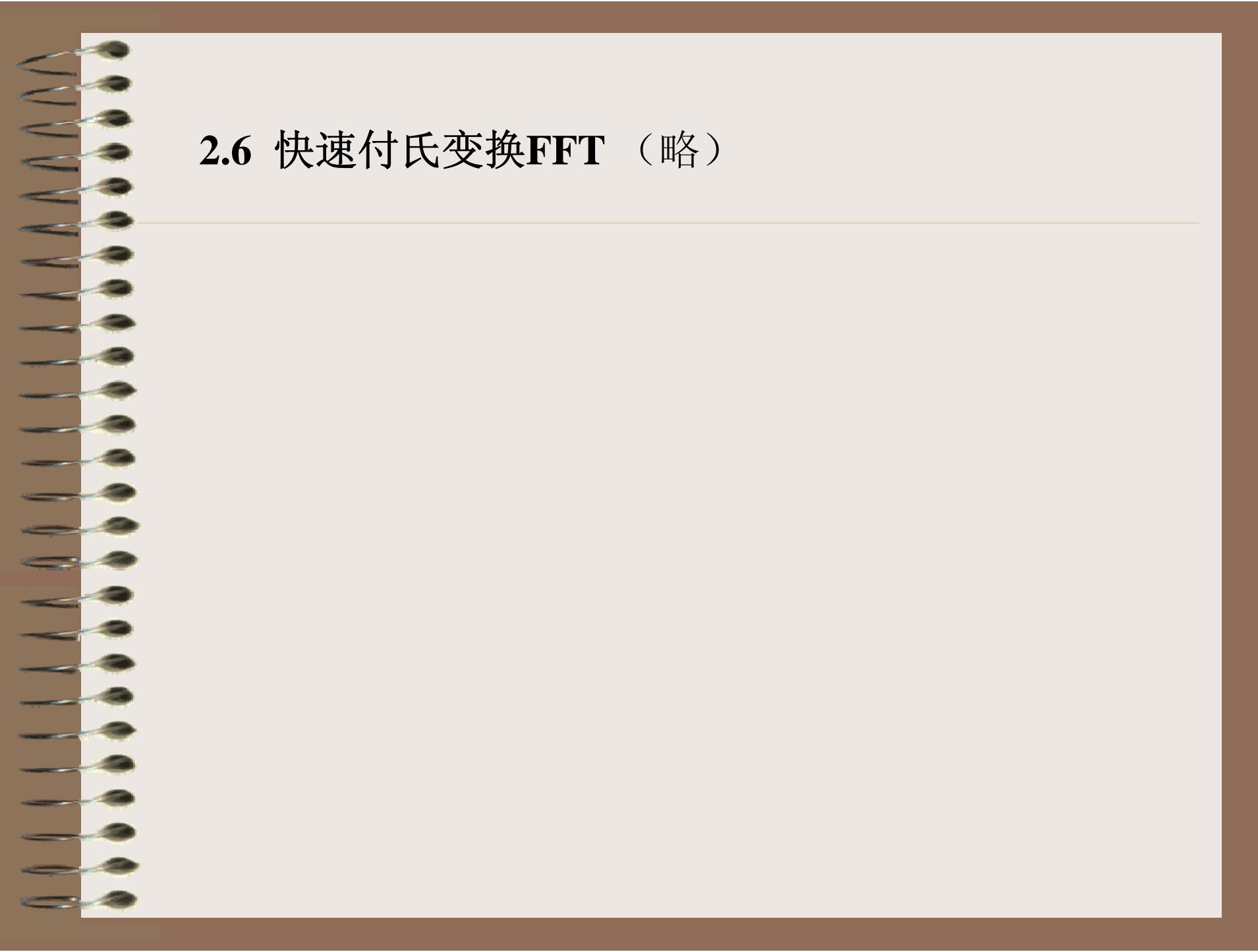


(a) 原图

(b) 受 Gaussian 噪声干扰的图像

(c) 去除噪声后的图像

用傅立叶变换去除白噪声示例图



2.6 快速付氏变换FFT (略)

2.7 其它常用变换（离散余弦、哈达码变换）

1、离散余弦变换（DCT）

$$[P] = [W_{NN}] [Q] [W_{NN}]$$

$$\text{欧拉展开: } \overline{w} = \exp \left[-j \frac{2\pi}{N} \right] = \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) - j \sin \left(\frac{2\pi}{N} \right)$$

为简化变换核（FFT为复数变换），只取实部则为离散余弦变换（去相关次最佳），只取（-1和1）则为哈达码变换。

$$\text{对于 } F(u, v) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[-j 2\pi \left(\frac{mu}{N} + \frac{nv}{N} \right) \right]$$

注意：当 $f(m, n)$ 为实对称时，后面 \sin 项为零，只余 \cos 项。

一般 $f(m, n)$ 不对称可拼为对称，四幅 $N \times N$ 拼成 $2N \times 2N$ 为实对称；

沿图 $f(m, n)$ 的水平、垂直二边界拼接四幅图，就成右图的 $2N \times 2N$ 图片。

有：

$$f_s(m, n) = \begin{cases} f(m, n) & m \geq 0, n \geq 0 \\ f(-1-m, n) & m < 0, n \geq 0 \\ f(m, -1-n) & m \geq 0, n < 0 \\ f(-1-m, -1-n) & m < 0, n < 0 \end{cases}$$

四幅拼合对称点在(-1/2,-1/2)之处

有:
$$F(u, v) = \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{n=-N}^{N-1} f(m, n) \exp\left\{ -j2\pi \left[u\left(m + \frac{1}{2}\right) + v\left(n + \frac{1}{2}\right) \right] \right\}$$

详细推导
见书

$$= \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cos\left[\frac{\pi}{N} u\left(m + \frac{1}{2}\right)\right] \bullet \cos\left[v\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]$$

全图共 N^2 项, 实际操作中, 卷积核可事先算好, 用LUT实现。DCT变换矩阵可写如下:

$$F = C_c [f] C_R'$$



$$C_c = C_R = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta & \cos 3\theta & \dots & \cos (2N-1)\theta \\ \cos 2\theta & \cos 6\theta & \dots & \cos 2(2N-1)\theta \\ \vdots & & & \\ \cos (N-1)\theta & \cos (N-1)3\theta & \dots & \cos (N-1)(2N-1)\theta \end{bmatrix} \quad \theta = \frac{\pi}{2N}$$

另：奇数点的DCT变换见有关书。

2、哈达码变换

[P], [Q]可以为其它函数，最常用为Hardamard Transform。

用方波，而不用正弦，只用加减不用乘除，简单、容易用硬件实现，软件模拟时可以方便地由计算机产生，不需预先存储起来，缺点：去相关能力差。

2×2的哈达码阵为：

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

对称, 正交 $H=H'=H^{-1}$

高阶哈达码矩阵可由下法构成: (见Castleman
P171页付氏变换)

$$[H_{2J,2J}] = [H_J] \otimes [H_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} [H_{JJ}] & [H_{JJ}] \\ [H_{JJ}] & -[H_{JJ}] \end{bmatrix}$$

小结: FFT——DCT—哈达码

$$[F] = H[f]H$$

复数域 实数 整数

$$[f] = H[F]H$$

2.8 K-L变换 (Karhunen-Loeve变换, Hotelling, 特征矢量, 主分量)

[把连续信号用一组不相关的系数表示, 是由karhunen Loeve提出, Hotelling则提出离散信号的不相关系数表示法, 习惯上不论对连续或离散信号这种去相关变换, 统称为karhuner-Loeve(K-L)变换或Hotelling变换, 也有叫特征矢量变换或主成份分解的。]

Hotelling变换是从图象的统计性质出发实现变换。它在数据压缩、图象旋转、遥感多光谱图象的特征选择和统计识别等中很有用。]

castleman P454

彩色: 3个波段R、G、B

遥感多: 128个波段

数据太多, 能不能通过某种形式, 保留主要的, 弃掉次要的。

下面讨论: 一个随机图象 $N \times N$ 矢量, 多光谱每个象素可看作一个矢量。 (F是 $N \times N$ 阶)

写成矢量 \bar{f} 是 $N^2 \times 1$ 维的, 即:

$$\bar{f} = [f_{11} \ f_{21} \cdots f_{N1}, f_{12} \ f_{22} \cdots f_{N2} \cdots f_{NN}]^T$$

$$\bar{f} = [f_1, f_2 \cdots f_Q] \quad Q = N^2 \quad (\text{矢量中各个分量都是随机分量})$$

矢量均值为: $m_f = E\{\bar{f}\}$

协方差矩阵: $\sum_f = E\{(\bar{f} - m_f)(\bar{f} - m_f)^T\} = R_f - m_f m_f^T$ 其中 $R_f = E\{\bar{f} \bar{f}^T\}$

相关矩阵

[一般情况下, 自协方差矩阵是对称的, 对角线上的阵元反映矢量各个分量的方差 σ^2 , 而非对角线上各阵元反映矢量的各个分量间的互方差],

注意到图象都是实数, 协方差矩阵都是实对称方阵, 存在完备特征矢量体系 (特征空间)

特征矩阵: $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_Q]$

$$\sum_f A = A\lambda$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_Q \end{bmatrix}$$

λ 各个分量互不相关

对非零 $a_i a_j$ 如正交, 则有: $a_i^T a_j = 1 \quad i = j$

$$= 0 \quad i \neq j$$

(主分量变换矩阵, 与原图象有关, 去相关性最好的变换)

如对 $\bar{f} - m_f$ 做K-L变换得:

$$\bar{g} = A^T (\bar{f} - m_f) \quad \dots \dots \dots (1)$$

则矢量 \bar{g} 的均值和协方差矩阵为:

$$m_g = E\{\bar{g}\} = A^T (E\{\bar{f}\} - m_f) = 0$$

$$\sum_g = E\{(\bar{g} - m_g)(\bar{g} - m_g)^T\} = E(\bar{g} \bar{g}^T) = A^T \sum_f A = \lambda$$

[Σ_g 为对角阵, 表示 \bar{f} 经K-L变换得到的 \bar{g} 已去相关性, 即已删除了它的冗余度, 这时 \bar{g} 的各分量方差和为:

$$\sum_{i=1}^Q \lambda_i = N^2$$

由 (1) $\bar{f} = A\bar{g} + m_f$

将 λ 由大到小排列: $\lambda_1 \rangle \lambda_2 \rangle \lambda_3 \rangle \dots \rangle \lambda_Q$

保留前面 m 项, 舍去 $m+1 \sim Q$ 项, 用对应的 m 个矢量 a_i 构成矩阵 A_m , 其余 $(Q-m)$ 个 \bar{f} 的分量只用它们对应均值表示, 即:

$$\hat{f} = A_m \bar{g}_m + m_f \quad A \text{ 取 } [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m \ 0 \ \dots \ 0]_{Q \times Q}$$
$$\bar{g}_m = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_m \ 0 \ \dots \ 0]_{Q \times 1}$$

与原来误差为：

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= E\left(\left|\bar{f} - \hat{f}\right|\right) \\ &= E\left[\left|\sum_{i=m+1}^Q a_i g_i\right|^2\right] = \sum_{i=m+1}^Q \lambda_i\end{aligned}$$

由于 λ_i 递减排列，所以误差也将最小。

[谈起来抽象，举例看一看具体含义]

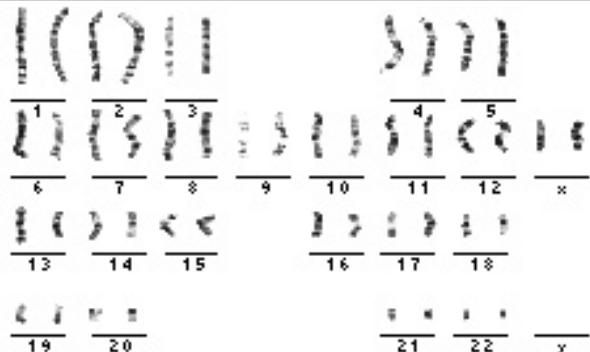
K-L变换去相关性最好，但求A不方便。实际操作中的各种变换往往把图象缩小成小方块，对其做DCT变换如 8×8 。 4×4 。

辽宁中医药大学附属儿科
染色体核型分析报告

姓名: 出生日期:

标本号: 采集日期:

诊断:



报告医师:

2.9 图像的采样

问题：如何将二维模拟信号转化为二维离散信号——图像数字化。

（现实一幅黑白照片各点的灰度值可用其位置坐标 (x, y) 的函数 $f(x, y)$ 描述， $f(x, y)$ 是二维连续函数，有无穷多个值，连续函数表示的图像无法用计算机处理，也无法在各种数字系统中传输或存贮。）

图像数字化包括：

采样：图像在空间上的离散化。

量化：对采样点灰度级值的离散化过程称为量化。

（很关键环节，保证图像质量）以一维举例：

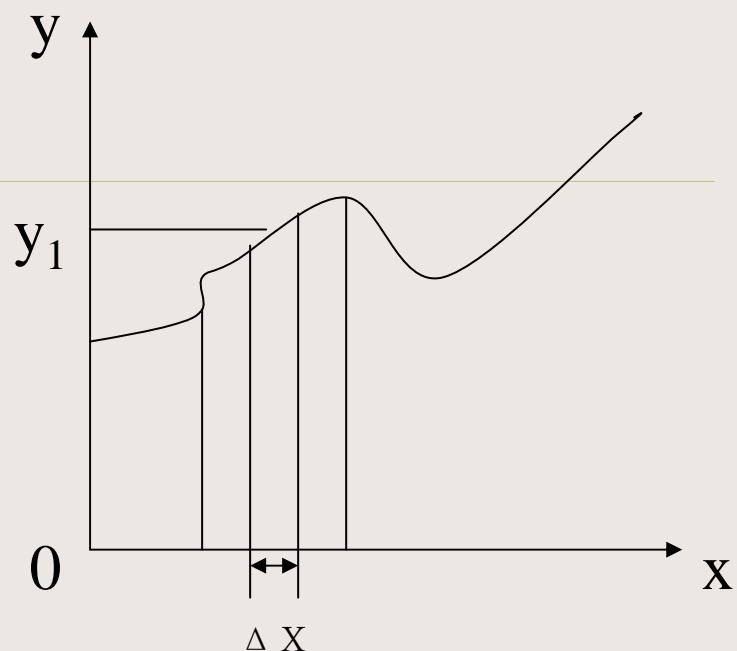
一维曲线用离散化数字表示：

①以 ΔX 为间隔，取为常值——采样。

②量化后值用有限个离散值来表示，常用8bits，256级。取值0~255，

那么 ΔX 取多大合理？ y_1 值量化级数多少才合适？

理论上越细越准，采样间隔缩小，量化级数增大，图象更真实。但细了，则数据量大，计算量，传输量，存贮量大；粗了，太粗人感觉到不像个图。最终是人眼来识别。超过人眼分辨率不必要；有时传感器也达不到。一般孔径——2~5HZ/度， 512×512 已足够，超过20HZ/度不敏感。具体图象 ΔX 取多少呢，同样幅面图象细节不同， ΔX 不同。





Lena 256*256图

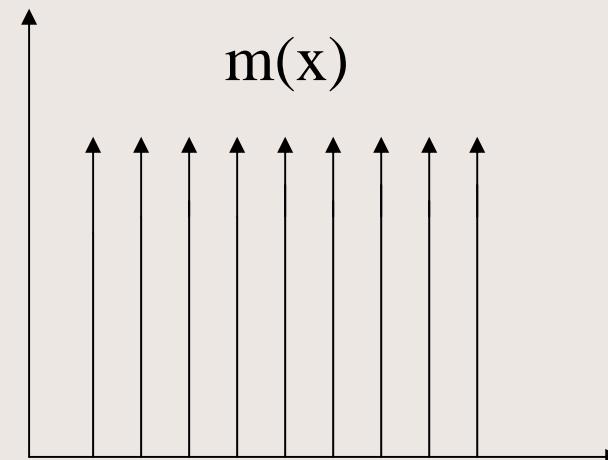
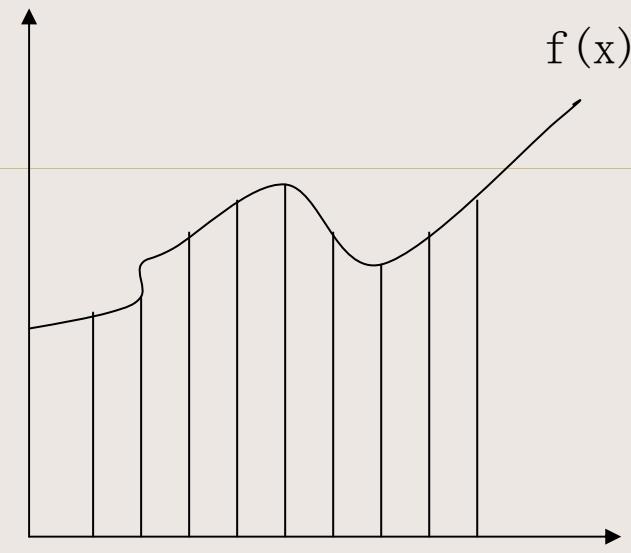


64*64 图



16*16图

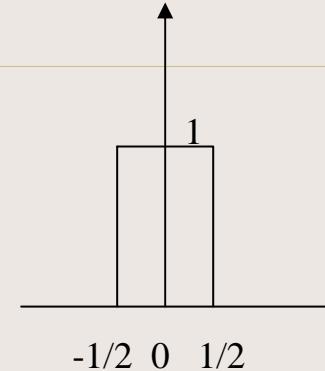
采样可理解为 $f(x)$ 与
 $m(x)$ 之乘积（数学描述）



采样定理:

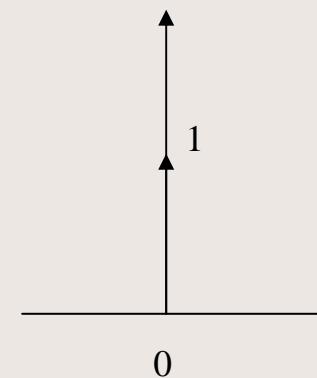
1) 矩形脉冲:

$$\cap(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \pm \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$



脉冲(冲击)函数:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1$$



$$\text{这里: } F(\delta(x)) = 1 \quad F^{-1}(1) = \delta(x)$$

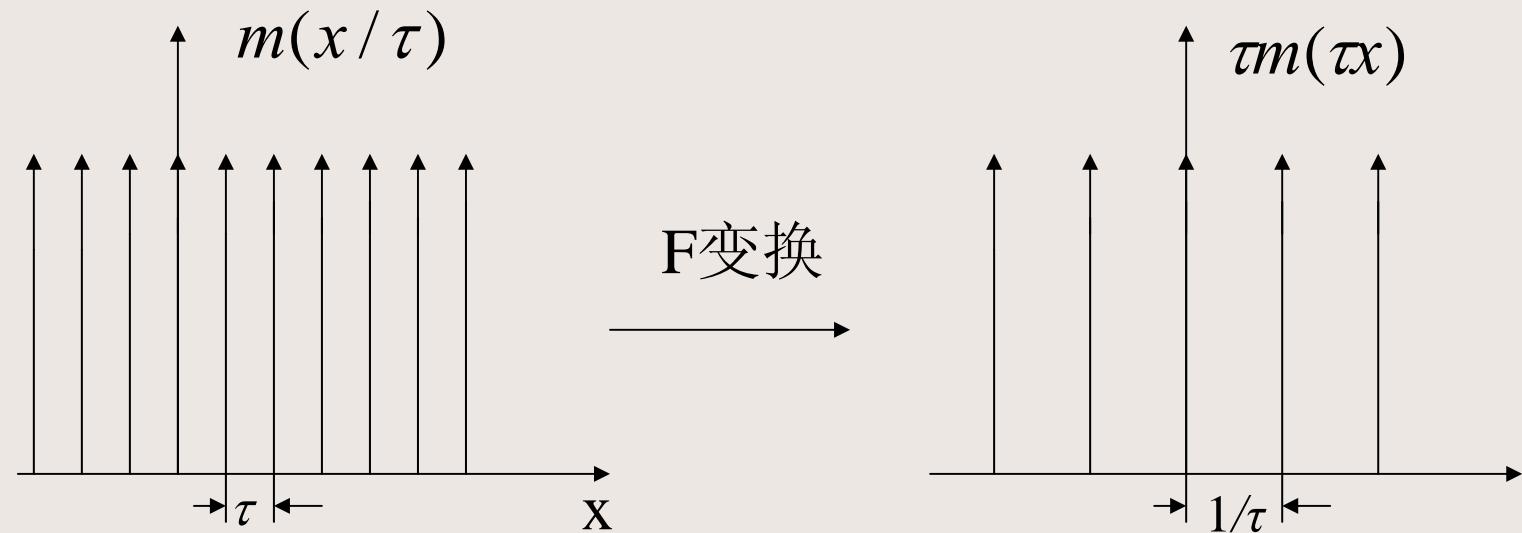
梳状函数：

$$m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

$$F(m(x)) = m(s)$$

$$m\left(\frac{x}{\tau}\right) = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - n\tau\right)$$

$$F\left(m\left(\frac{x}{\tau}\right)\right) = \tau m(\tau s) \rightarrow \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{n}{\tau}\right)$$



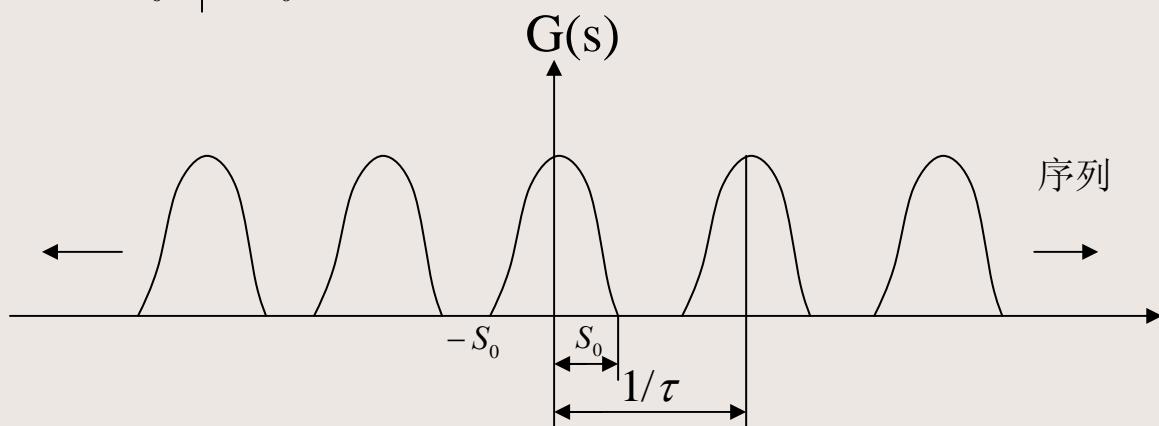
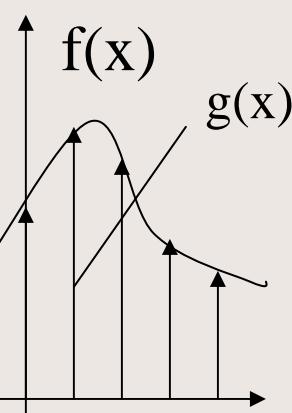
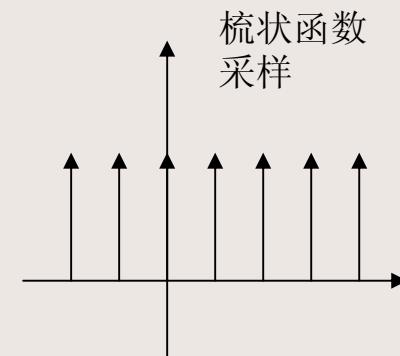
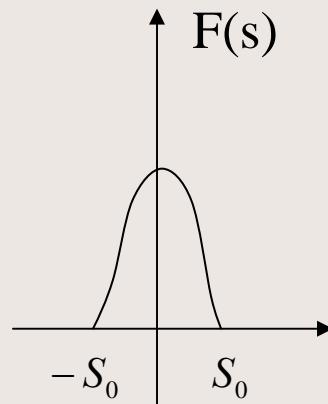
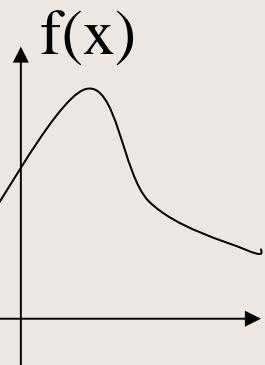
[注意：无穷系列才有此关系，实际情况并非如此]

2) 梳状函数采样

输出: $g(x) = m(x/\tau) f(x)$ 两边付氏变换 (到频率域)

$$G(s) = \tau m(\tau s) * F(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(s - \frac{n}{\tau}\right)$$

(间隔为 $1/\tau$ ，与 $F(s)$ 不同，为一系列 $F(s)$)



[采样后能否恢复原函数？]

若 $G(s) \xrightarrow{\text{恢复}} F(s)$ 则 $g(x) \rightarrow f(x)$

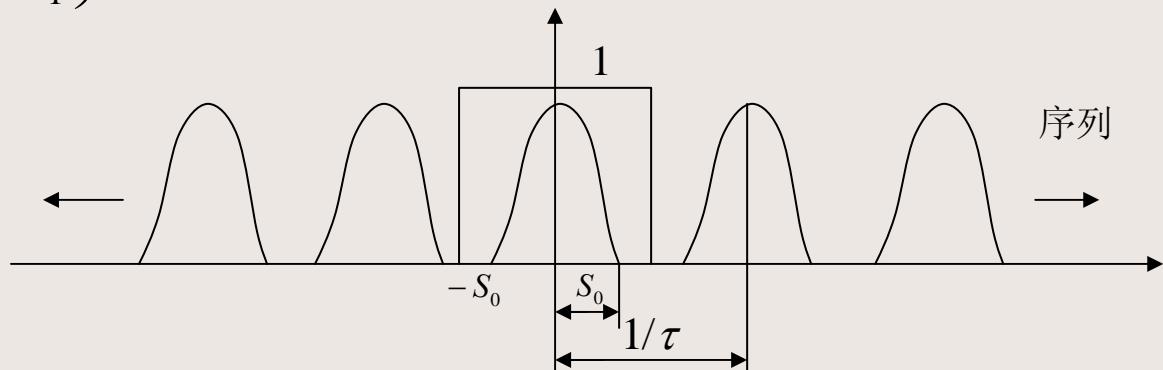
仅在 $G(s)$ 中保留中间部分，即为 $F(s)$ (滤波)

$G(s) \rightarrow F(s) \rightarrow$ 反变换可得 $f(x)$

选取一个矩形脉冲 $\cap\left(\frac{s}{2s_1}\right)$ 以满足下式：

即： $G(s) \cdot \cap\left(\frac{s}{2s_1}\right) = F(s), \quad S_0 \leq S_1 \leq \frac{1}{\tau} - S_0$

满足此条件
则可恢复。



Shannon(香农)采样定理:

$$f(x) \text{ 有限带宽, } 1/\tau \text{ 满足: } S_0 \leq S_1 \leq \frac{1}{\tau} - S_0$$

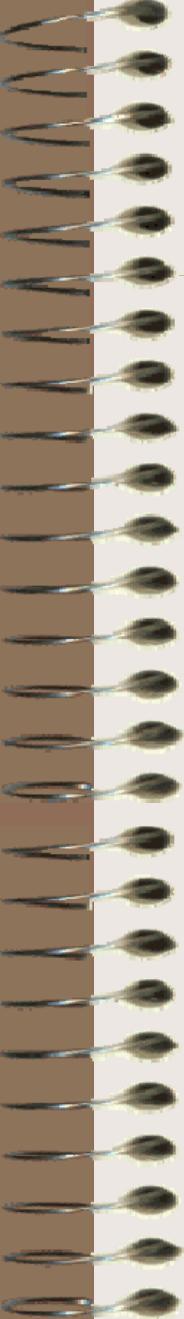
$$\text{或: } \tau \leq \frac{1}{2S_0}$$

即当有限带宽函数 $\tau \leq \frac{1}{2S_0}$ 时, 可以从采样函数中恢复原函数。

恢复 $f(x)$:

$$f(x) = F^{-1}[F(s)] = F^{-1}[G(s) \cdot \cap \left(\frac{s}{2s_1} \right)]$$

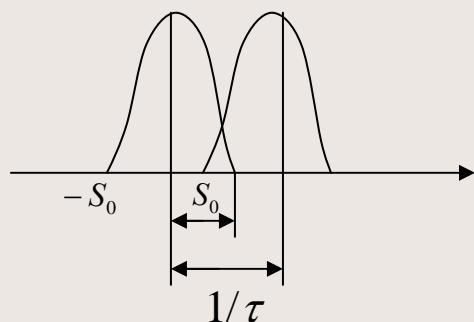
$$= g(x) * 2s_1 \frac{\sin(2\pi s_1 x)}{2\pi s_1 x}$$


$$\frac{\sin(2\pi s_1 x)}{2\pi s_1 x} \longrightarrow \text{SinC函数}$$

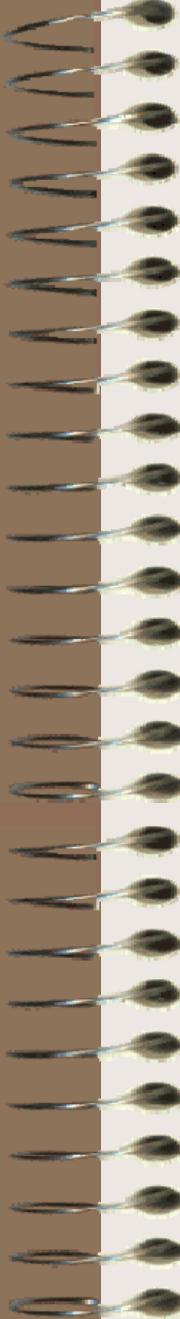
对 $g(x)$ 用SinC函数做插值

进一步讨论，带宽很宽时，如何呢？

τ 大 $\frac{1}{\tau}$ 小，当 τ 很大时，取样不足，形成混迭
(aliasing)



频带出现搭接现象



混迭是不可避免的：

1. 实际中图像信号为无限带宽。
2. 采样间隔 ΔX , ΔY 不可能无限小——实际设备决定最小有限带宽。
3. 脉冲有宽度, 采样孔径不是点, 是面积平均值, 有低通滤波效果。(由于实际输出图像样本是光的时间积分, 这就相当于取样脉冲是有一定宽度而不是一系列冲激, 由此引起图像模糊, 等效于对理想图像起一个低通滤波器作用, 取样脉冲宽度效应。)
4. 边缘有限插值截断(采样梳状函数是有限序列)

(在取样图像经过内插重建时, 由于内插函数尾部在边界被截断会造成边界误差)

实际中有失真, 但人眼分辨率也是有限的。

2.10 二值图像的采样

1. 拓补结构（采样网格型式）：正方形与六边形

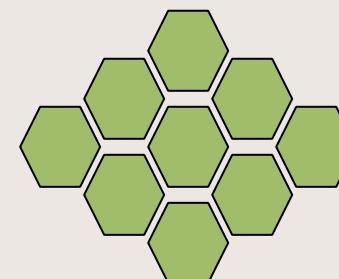
正方形：易实现，但采样孔一般圆形，因此有相互重叠现象，且有四邻域与八邻域问题）。

一个象素，8个邻点，4个距离近（边相邻，直接相邻），4个距离远（点相邻，间接相邻）

六角形：各元与邻元之间边界相同，但各元与邻元间距——水平及垂直各不相同，便于采样但不便于计算。

（概念上不能忘，有人在研究，工程实现不方便）

+	Δ	+		
Δ	\times	Δ		
+	Δ	+		



2. 连通性问题:

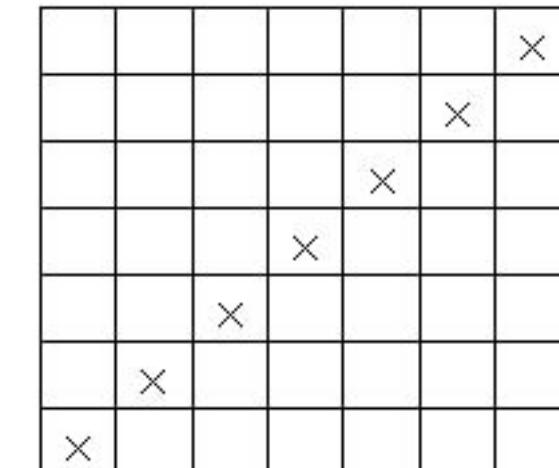
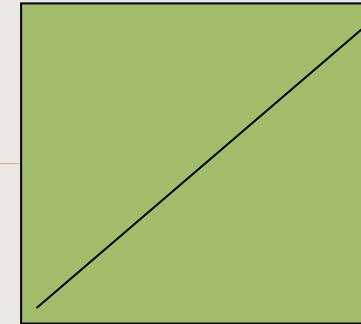
若 $X X X X X \dots$ 为线。

连续域内，一条线将平面分为不连续两个区。

但离散空间，按8邻域定义，则一条线未把背景划分两个区，若按4个邻域，则不连续的点将背景划分为两个区。

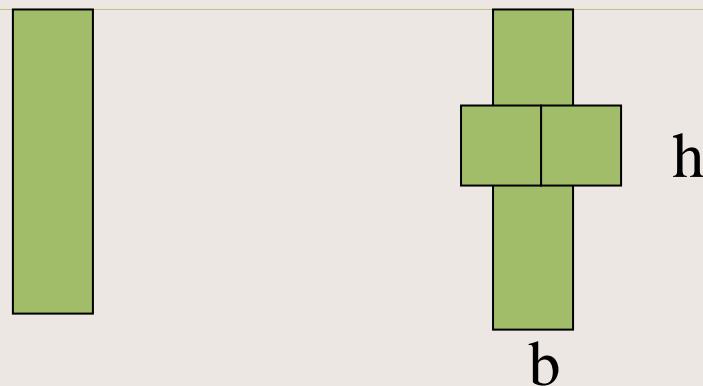
实际解决办法：

图形用8邻域，背景用4邻域。
临时解决方法，现在无根本解决好办法，比如：连续域上线无宽度而离散域上有宽度。



3. 保持图画细节的最大采样间隔

线宽 b ,采样间隔 h , 当 $b>h$, 不丢失线, 否则, 丢失。



2.11 图像的量化问题

[经过取样的图像,只是在空间上被离散为象素(样本)的阵列,而每一个样本灰度值,还是一个有无穷多个取值的连续变化量,必须将其转化为有限个离散值,赋于不同的码字才成为真的数字图像。这样的转化过程称其为量化]。

量化：包括均匀量化和非均匀量化。

均匀量化：连续灰值等间隔分层。层越多，产生的量化误差越小。

非均匀量化：不等间隔分层，目的减少量化误差，按灰值出现的概率不同进行量化——灰值经常出现，量化细；灰值不常出现，量化粗。

但是：量化级别不能取得过多，当噪声幅度大于量化间隔，量化器输出量化值会产生错误。屏幕上图像上灰值邻近区域边界会出现“忙动”现象。

下面看一看使总量化误差最小的量化方案（实际中往往是等间隔量化的。）

已知： $p(z)$ 为概率（直方图），给定 Z_1 及 Z_{k+1} ，量化级数为 k 级。

求：按量化误差最小来确定 Z_i 和 q_i ($i=1,2\dots k$)。

量化误差:

$$\begin{aligned}\delta_q^2 &= \int_{Z_1}^{Z_2} (z - q_1)^2 p(z) dz + \int_{Z_2}^{Z_3} (z - q_2)^2 p(z) dz \\ &\quad + \cdots + \int_{Z_K}^{Z_{K+1}} (z - q_k)^2 p(z) dz \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (z - q_k)^2 p(z) dz\end{aligned}$$

[当量化层数K很大时, 对每一个层内P (Z) 可近似看作一个常数]

对 Z_k 进行求导, 并令其为0得:

$$\frac{\partial \delta_q^2}{\partial Z_k} = 0 \quad \text{即:}$$

$$(z_k - q_{k-1})^2 p(z_k) - (z_k - q_k)^2 p(z_k) = 0 \quad k = 2, 3, \dots, K$$

$$\text{得: } z_k = \frac{q_k + q_{k-1}}{2}$$

两个重心的中点

对 q_k 求导：

$$\frac{\partial \delta_q^2}{\partial q_k} = 0 = -2 \int_{z_k}^{z_{k+1}} (z - q_k) p(z) dz$$

$$\text{得: } q_k = \frac{\int_{z_k}^{z_{k+1}} z p(z) dz}{\int_{z_k}^{z_{k+1}} p(z) dz}$$



在 z_k 和 z_{k+1} 的 $p(z)$ 重心处

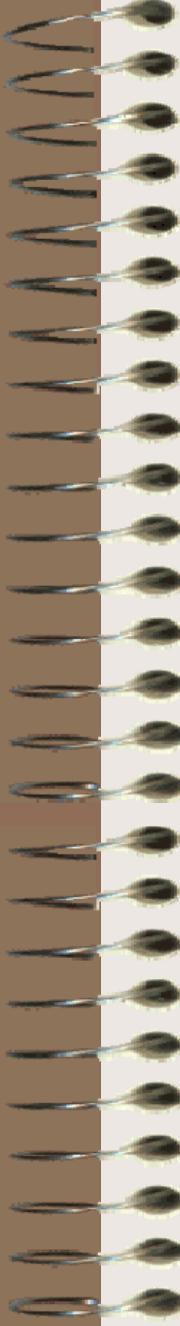
$k=1,2,\dots,K$.

可见，得不到显函数解，只能根据具体 $p(z)$, z_1, z_k 使用中逐次逼近，用试凑的方法解决。

结论：1、 Z_k 在 q_k 和 q_{k+1} 的中间；

2、 q_k 在 Z_k 和 Z_{k+1} 之间 $p(z)$ 的重心处。量化误差最小。

举例：（见讲义）



采样与量化的关系：

$N \times N$ 点采样，每点灰级 K 级， $K=2^b$ ，占 b 位。

总数据量 $N \times N \times b$ 位二进制数据。

当总存储容量一定时， N 与 b 怎么分配效果才最佳？

解：

无一般方法，取决于具体图像。

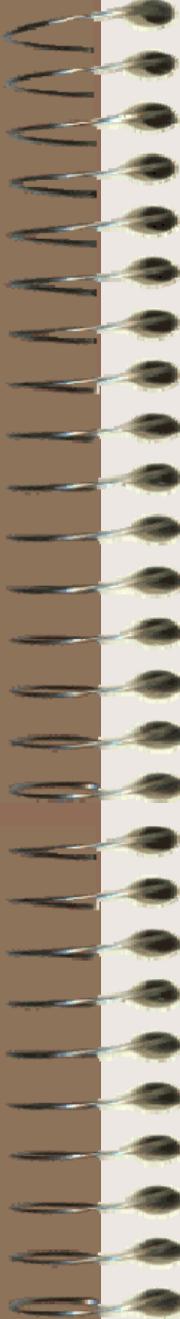
当纹理细节多时 N 大， b 小。

当层次要求多时，则 b 大， N 小。

例如：

人头像——要照顾层次 b 大， N 小（频带窄平滑，采样间隔可大）。

群众场面——纹理丰富 b 小， N 大（频带宽，采样间隔要小，不丢细节）。



CCD成像及彩色原理

——第二章有关数学基础的扩展

Interface of Digital Imaging

Category	USB 2.0	IEEE-1394a	CameraLink
Topology	Master-slave, OTG	Peer-to-peer	Master-slave
Bit rates	480 Mbits/s	400 Mbits/s	1.6 Gbit/s, 4.8 Gbit/s
Transaction intervals	125 microseconds	125 microseconds	Synchronous
Bus master	Dedicated	Allocated at bus reset	PC
Signaling	Current mode differential	LVDS, optical	Multiplexed LVDS
Cable Distance	5 M, Up to 30M with 5 hubs	4.5 M, more with repeaters	10M max
No. of Wires	4	6	26, 52
Bus Power Consumption	Up to 500mA @ 5V	Up to 1.5A	no
Licensing	No	Licensing agreement and royalties	No
Main applications	PC-centric	Consumer electronics	PC-centric
Devices in network	127	63	1

- CCD原理

电荷耦合器件（Charge Coupled Device，即CCD），一种集光电转换、电荷存贮、电荷转移为一体的传感器件，最早由贝尔实验室发明。构成CCD的基本单元是MOS电容。

- CCD结构：

- “微型镜头”

- 等于在感光层前面加上一副眼镜。

- 感光面积不再由传感器的开口面积决定，而改由微型镜片的表面积来决定。

- “分色滤色片”

- 目前有两种分色方式，

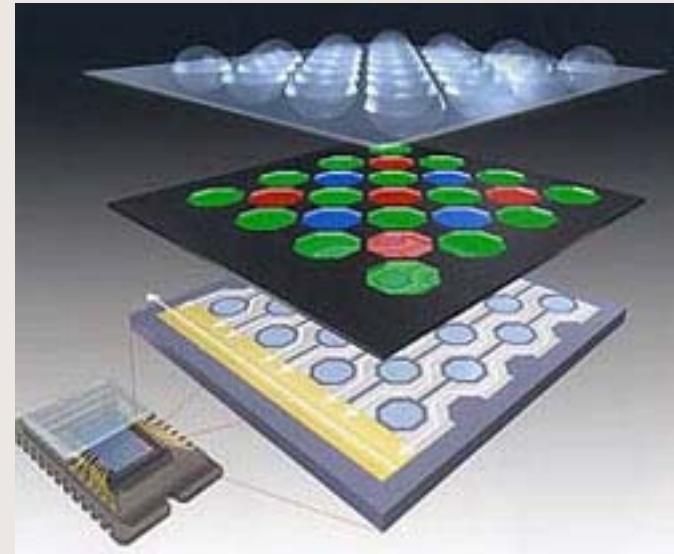
- 一是RGB原色分色法，

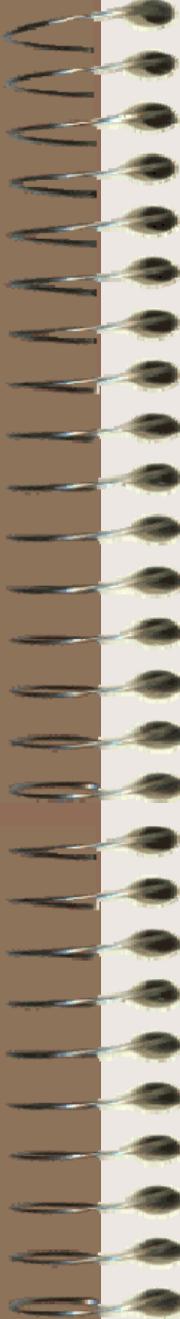
- 另一个则是CMYK补色分色法。

- 原色CCD的优势在于画质锐利，色彩真实，但缺点是噪声问题。相对的，补色CCD多了一个Y黄色滤色器，在色彩的分辨上比较仔细，但却牺牲了部分影像的分辨率，但补色CCD可以容忍较高的感光度。

- 感光层

- 这层主要是负责将穿过滤色层的光源转换成电子信号，并将信号传送到影像处理芯片，将影像还原。





CCD功能：

1. 光-电转换功能

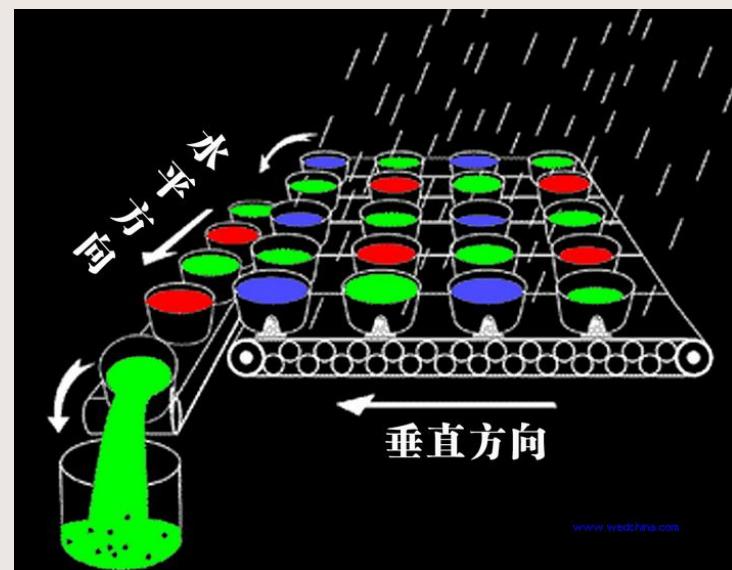
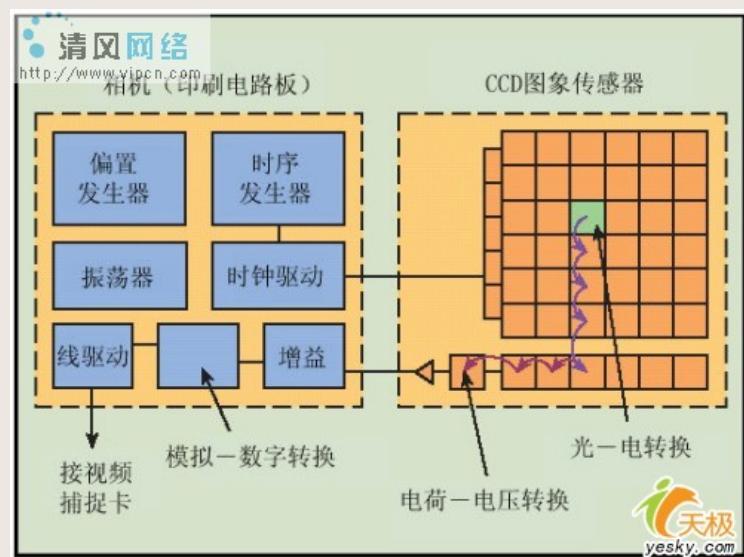
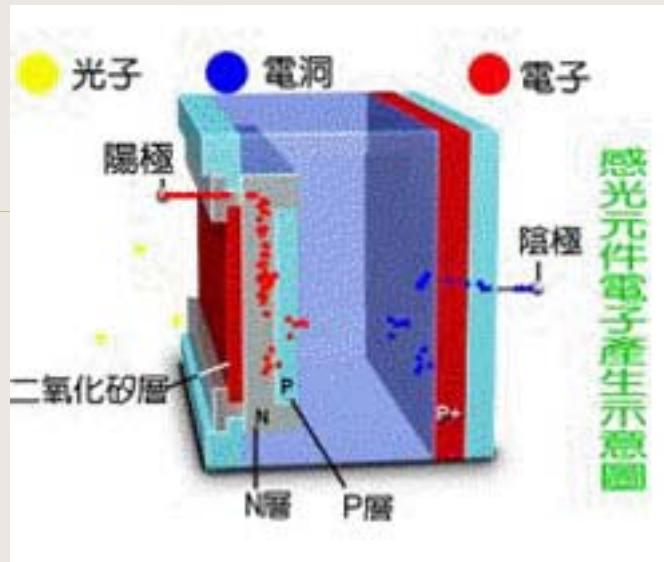
在P型单晶硅的衬底上做一层绝缘氧化膜,再在氧化膜表面做出许多排列整齐的可透光的电极,当光线通过时,氧化膜与P型单晶硅之间产生电荷,其电荷的数量与光照强度及照射时间成正比,这就是CCD的光电转换功能。

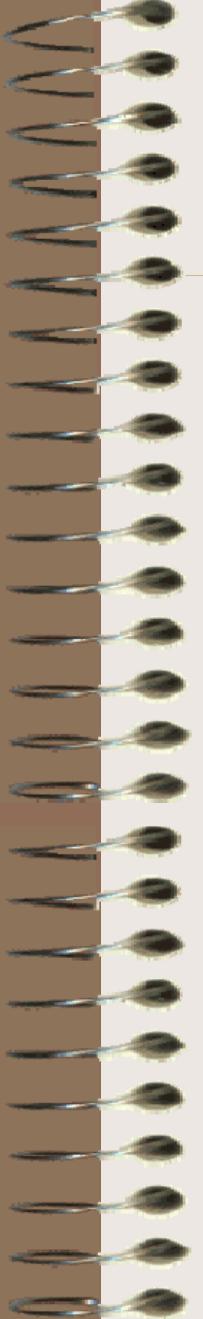
2. 电荷存贮功能

若在电极加上一个适当的正电压,则在电极和衬底之间产生一个电场,这个电场在P型硅中将载流子带正电的空穴排斥到衬底电极一边,在电极下硅衬底表面形成一个没有可动空穴的带负电的区域,这个区域称作电荷耗尽区,这就是能够吸引电子的势阱,电极上所加的电压越高,势阱越深,电荷留在阱内量越多,只要电压存在,电子就能储存在势阱里,当景物的光照射到CCD时,具有光敏特性的P型硅在光量子的激发下产生电子-空穴对,空穴移向衬底而消失,电子进入势阱并存储在那里,由于绝缘氧化物层使得电子不能穿过而到达电极,因此存贮在势阱里的电子形成了电荷包,其电荷量的多少与光照强度成正比,所有电极下的电荷包就组成了与景物相对应的电荷像。

3. 电荷转移功能

势阱的深浅由电极上所加电压的大小决定。电荷在势阱内可以流动,它总是从相邻浅阱里流进深阱中,这种电荷流动称为电荷转移。若有人规律改变电极电压,则势阱的深度就会随之变化,势阱内电荷就可以按人为确定的方向转移,直到最终由输出端输出。这就是CCD的电荷转移原理。





电荷转移又分单相驱动、双相驱动、三相驱动及四相驱动等多种方式,除了电极构造及所加电压波形不同以外,其转移原理是一样的。四相驱动方式即将绝缘层上的电极按列的方式每四个分为一组,形成一个像素单元,每组电极分别加上不同的偏置电压,则在电极下绝缘膜与P型硅之间就产生不同深度的势阱,如果有规律地改变电极上的电压值,使势阱产生变化,就可以使电子定向移动,这也就是CCD的扫描读出原理。

根据转移电极结构及转移方式的不同又分成帧转移(FT)方式;行间转移(IT)方式;帧行间转移

CCD的四种类型：

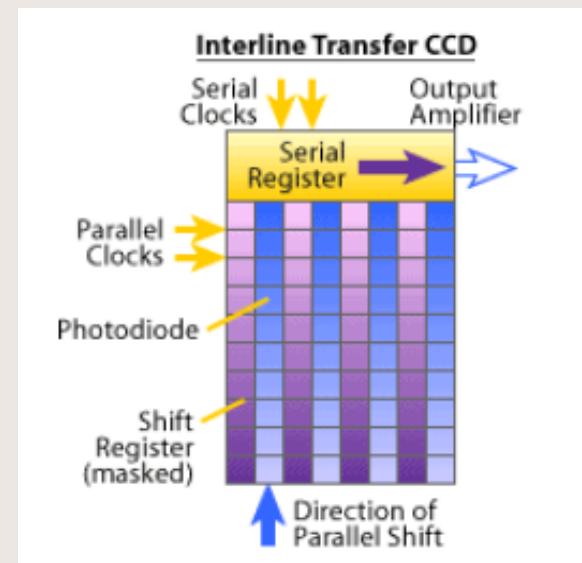
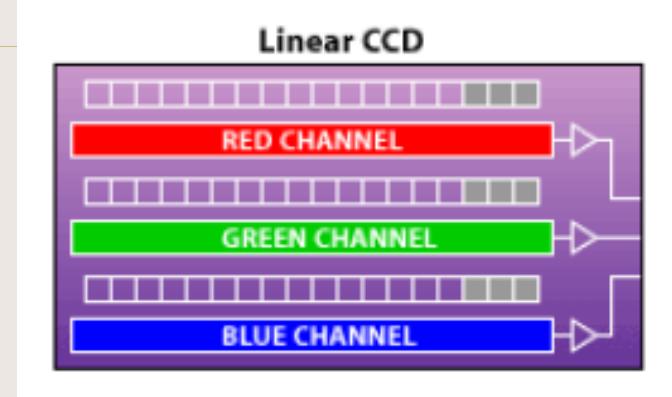
linear 线性、interline扫描、全景 full-frame和 frame-transfer 全传

线性CCD

- 是以一维感光点构成，透过
- 步进马达扫描图像。多用于平台
- 式扫描仪之上。

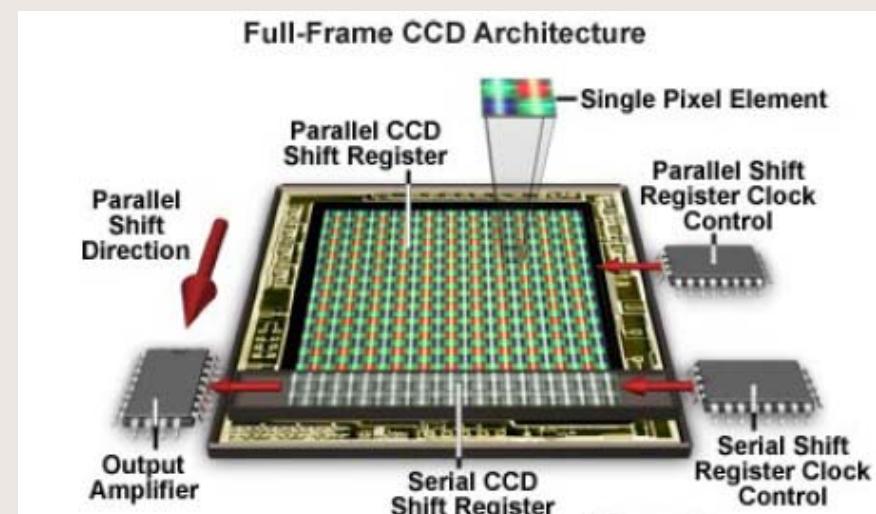
Interline 扫描型

- 透过垂直传送带从暂存矩阵中
- 读出讯号，再向下转移至底部水平
- 转换记录器然后电荷在搬到放大器
- 中再到DSP里读出水平光电位置行列，
- 产生完整的数字影像。清空缓存器后，
- 再重新设定光电位置以便接收下一张
- 影像。速度较快，缺点是动态范围
- 较小。



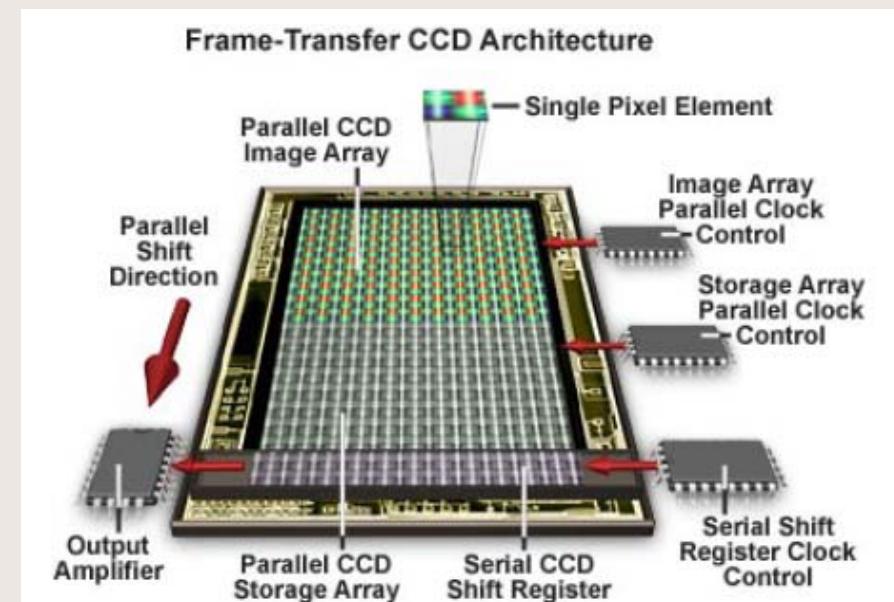
Full-Frame 全像 CCD

- 是一种架构更简单的感光设计。利用整个感光区域（没有暂存区的设计），有效增大感光范围，同时也适用长时间曝光。其曝光过程和 Interline 相同，不过感光和电荷输出过程是分开的。因此，使用 FF CCD 的数字相机在传送电荷信息时必须完全关闭快门，以隔离镜头入射的光线，防止干扰。这也意味着 FF 必须使用机械快门（无法使用 IL 的电子 CLOCK 快门），同时也限制了 FF CCD 的连续拍摄能力。Full-Frame CCD 大多被用在顶级的数位机。



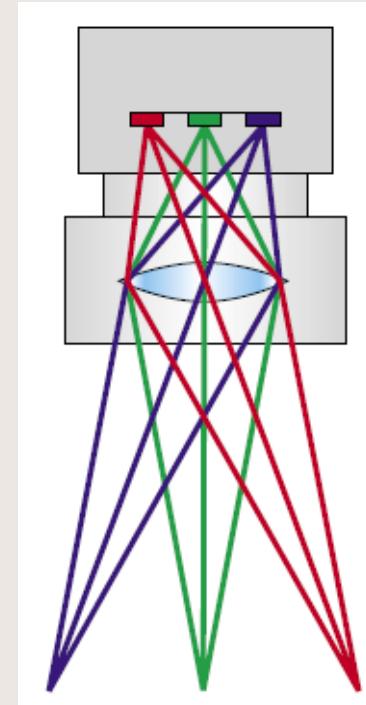
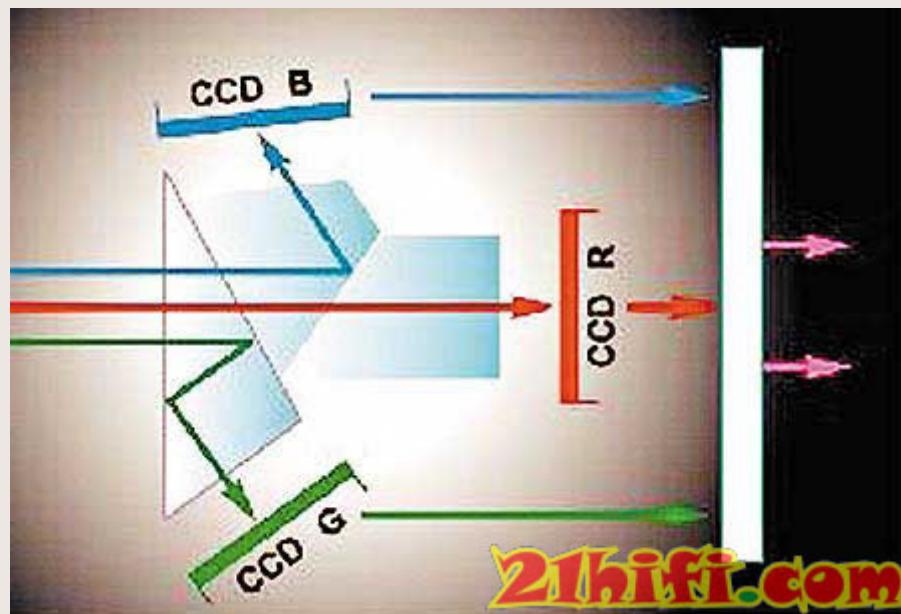
Frame-Transfer 全传 CCD

- 架构介于 IL 和 FF 之间的产品，分成两个部分。上半部是感光区，下半部是暂时存储区。整体来说 Frame-Transfer CCD 非常的类似 Full-Frame CCD，它的特点在于直接规划了一个大型暂存区。一旦FT CCD 运作，它可以迅速将电荷转移到下方的暂存区中，本身则可以继续曝光拍照。这个设计，让FT 同IL 一样可以使用电子快门，但同时也可增加感光面积和速度。

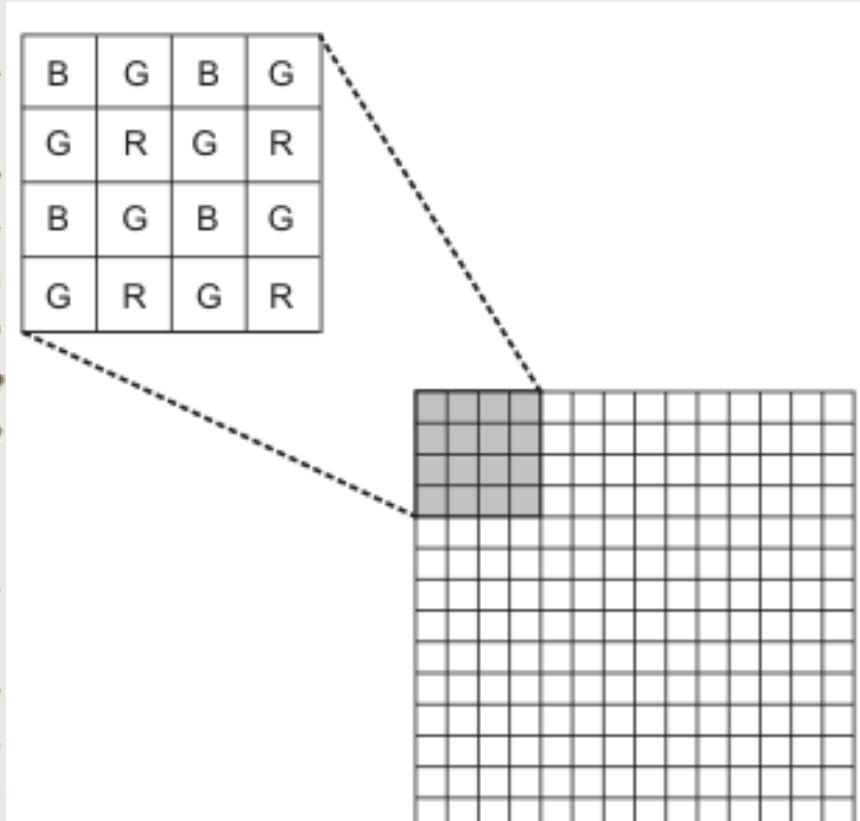


- 彩色——线阵3 CCD举例：

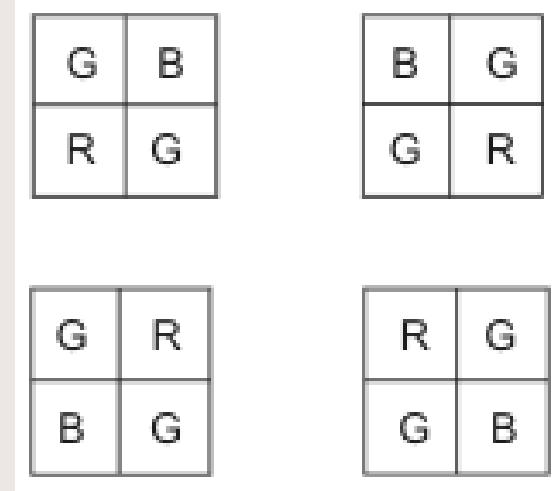
Basler L300kc



- 彩色单CCD举例——Bayer成像方法：
分别采集RGB信号，之后通过插值运算得到最终的彩色图像。



四种模式



插值运算

绿色

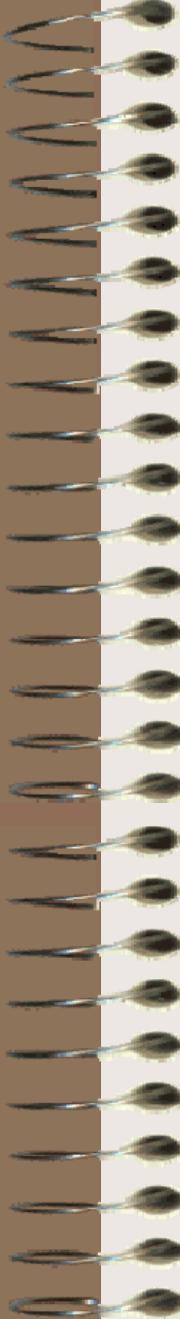
B_1	G_2	B_3	G_4	\vdots
G_{11}	R_{12}	G_{13}	R_{14}	\vdots
B_{21}	G_{22}	B_{23}	G_{24}	\vdots
G_{31}	R_{32}	G_{33}	R_{34}	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

B_1	G_2	B_3	G_4	\vdots
G_{11}	R_{12}	G_{13}	R_{14}	\vdots
B_{21}	G_{22}	B_{23}	G_{24}	\vdots
G_{31}	R_{32}	G_{33}	R_{34}	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

红和蓝

B_1	G_2	B_3	G_4	\vdots
G_{11}	R_{12}	G_{13}	R_{14}	\vdots
B_{21}	G_{22}	B_{23}	G_{24}	\vdots
G_{31}	R_{32}	G_{33}	R_{34}	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

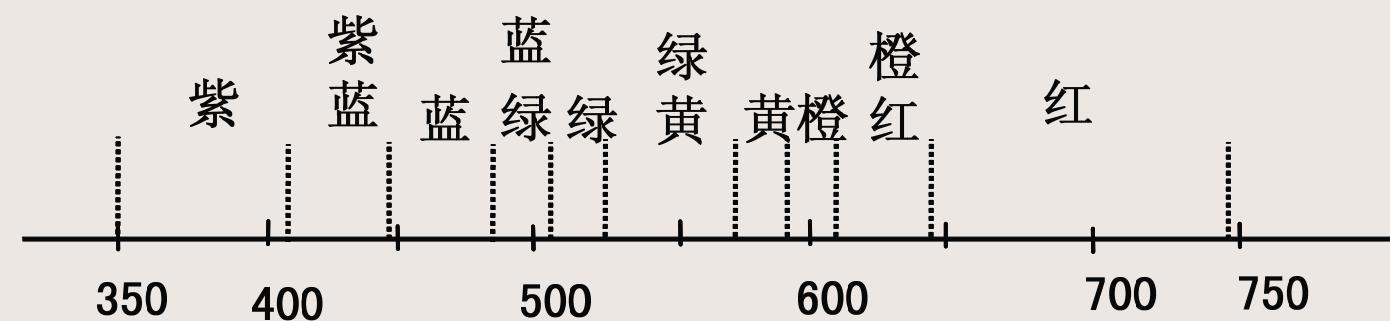
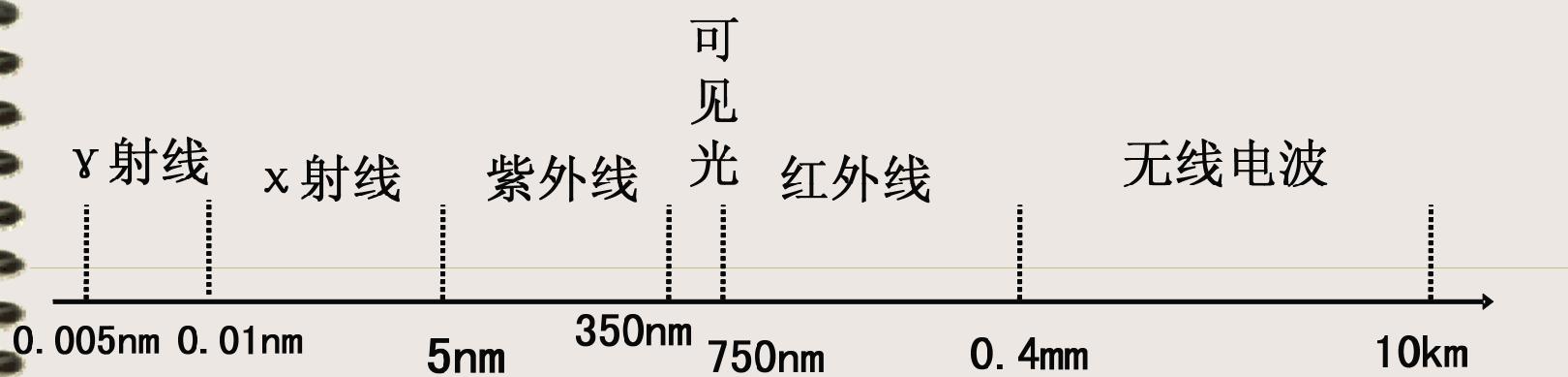
B_1	G_2	B_3	G_4	\vdots
G_{11}	R_{12}	G_{13}	R_{14}	\vdots
B_{21}	G_{22}	B_{23}	G_{24}	\vdots
G_{31}	R_{32}	G_{33}	R_{34}	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots



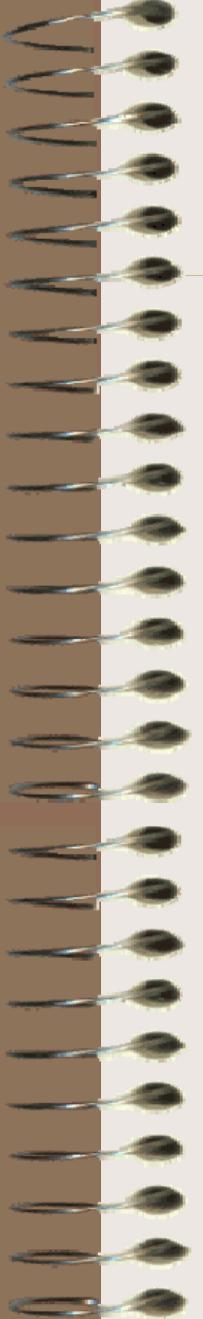
颜色与颜色空间

1.1 颜色

- 光波：光是一种按波长辐射的电磁波。
(如图，可见光谱)
- 颜色
 - 视觉系统对可见光的感知
 - 视网膜上锥状光敏细胞：光强与颜色。
 - 视网膜上杆状光敏细胞：光强。
 - 颜色度量：色调、饱和度、亮度



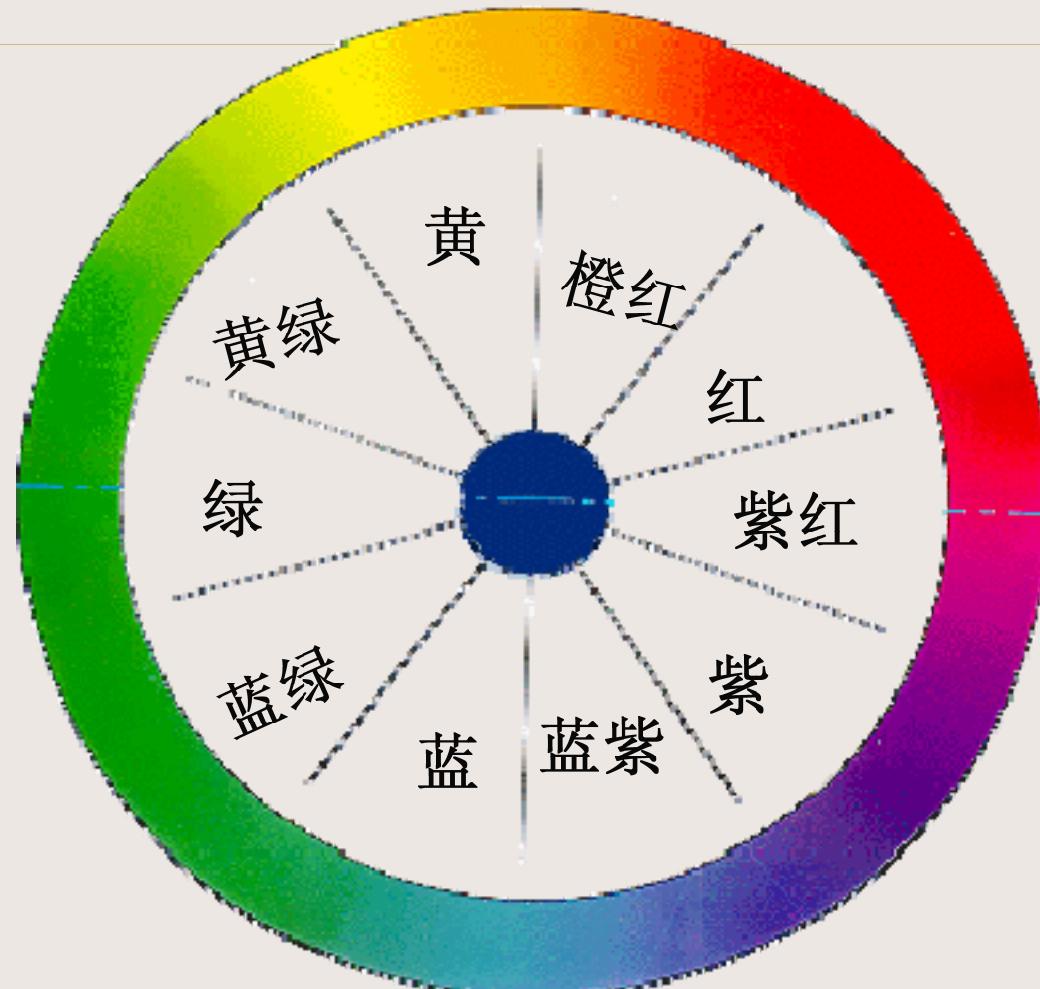
- 光的物理性质：波长（光速，频率）和幅度
 - 人眼对色彩的感觉：色调、饱和度和亮度
-
- 色调——波长
 - 亮度——幅度
 - 饱和度——色光的纯度

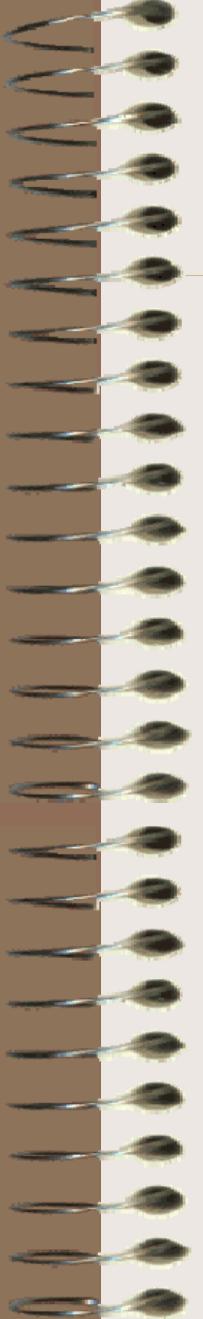


色调hue:

- 色调hue:人眼感觉到物体反射或发射光波的波长。色调就是颜色的分类。如
 - 七色: 红、橙、黄、绿、青、蓝、紫
 - 在色谱中, 色调连续变化。

◆色调





饱和度saturation

- 饱和度saturation: 指颜色的纯正程度。
 - 与亮度有关: 某一色调参入白光, 色调不变但饱和度降低
 - 与参入其它颜色的光有关: 饱和度与色调都会改变。



不完全饱和

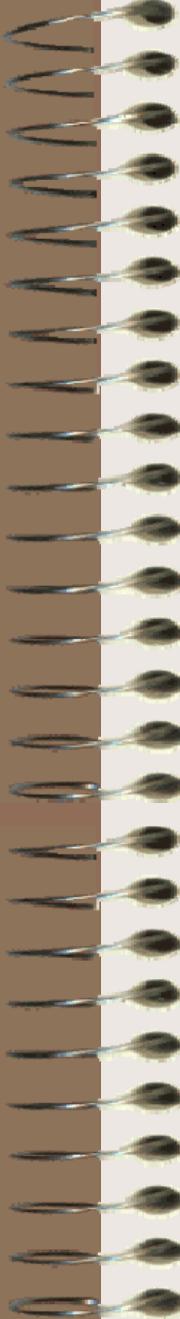
完全饱和

不完全饱和

亮度：人眼感受到的颜色光的强度

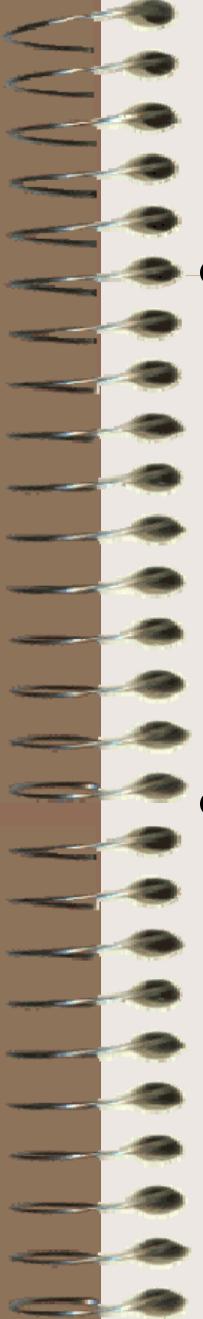
- 同一种色块，在不同强度的白光照射下，反射的光波波长一样（色调相同），但人眼感觉到的颜色不同。
- 某一颜色的光，量度很弱，趋于黑色，反之，趋于白色。





• 颜色相加与相减

- 相加：发光物体发出某些波长的光波，这些波长的光波叠加在一起。
- 相减：白光照在某种颜色的物体上。部分波长的光波被吸收，剩下波长的光波进入人的眼睛。



1.2 颜色空间

- 彩色空间：

色度图（国际亮度委员会International Committee on Illumination, CIE）表明定义颜色至少需要3个参数。用3元组(x, y, z)表达一个颜色和在3维空间定义一个点相似，称为彩色空间。

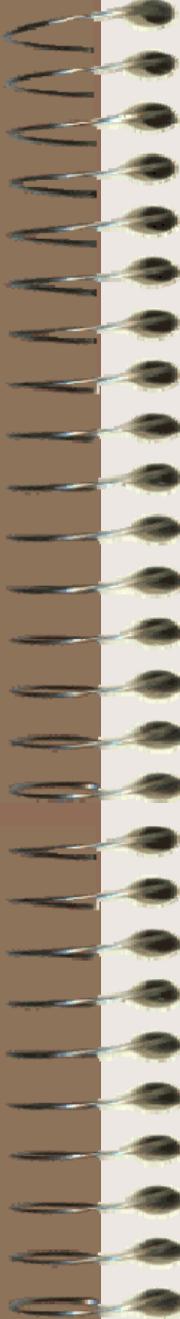
- 常见颜色空间：

RGB：显示器信号

HSI：人眼识别

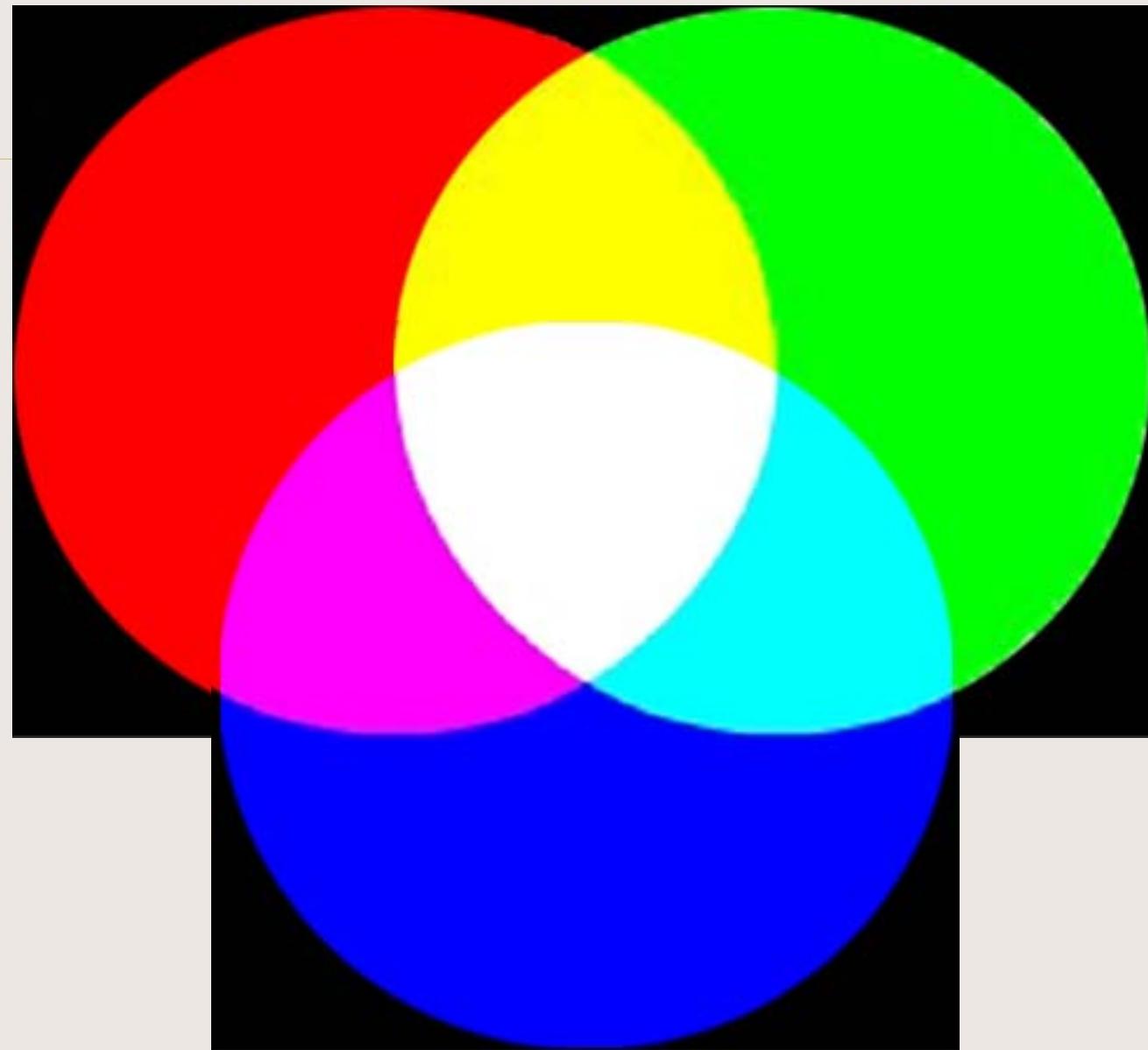
CMY：彩色印刷

YUV (YCbCr)：电视信号

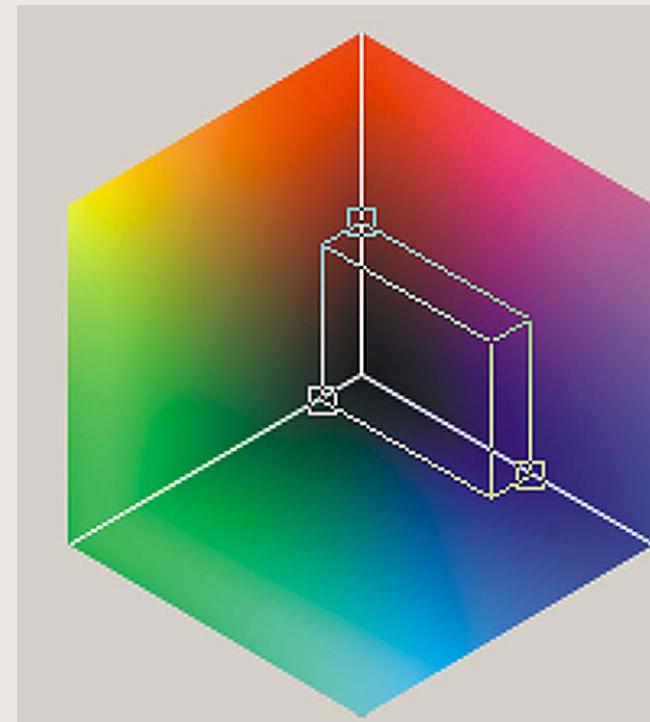
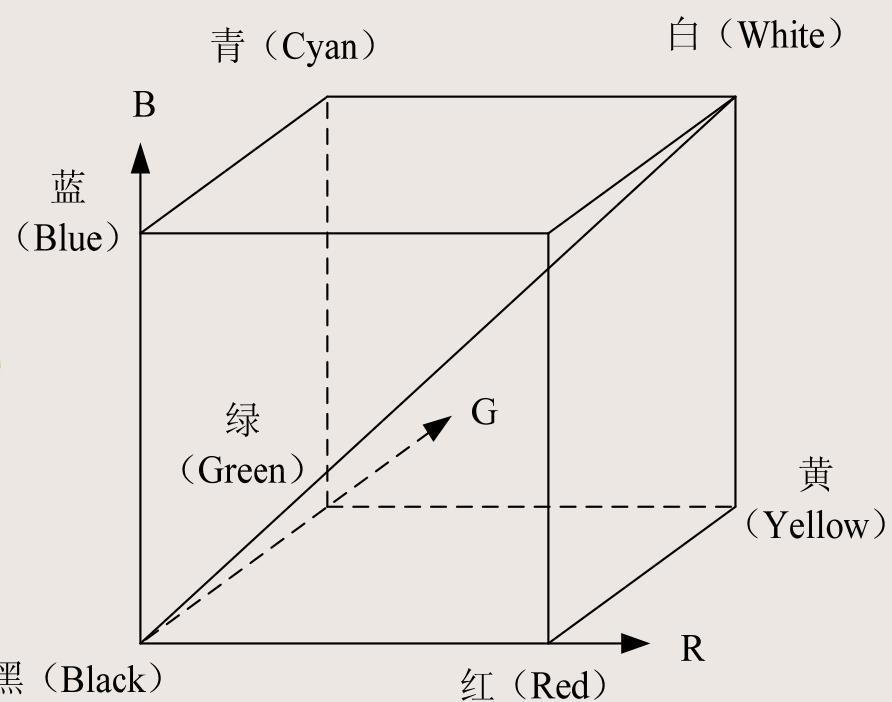


1. RGB颜色空间

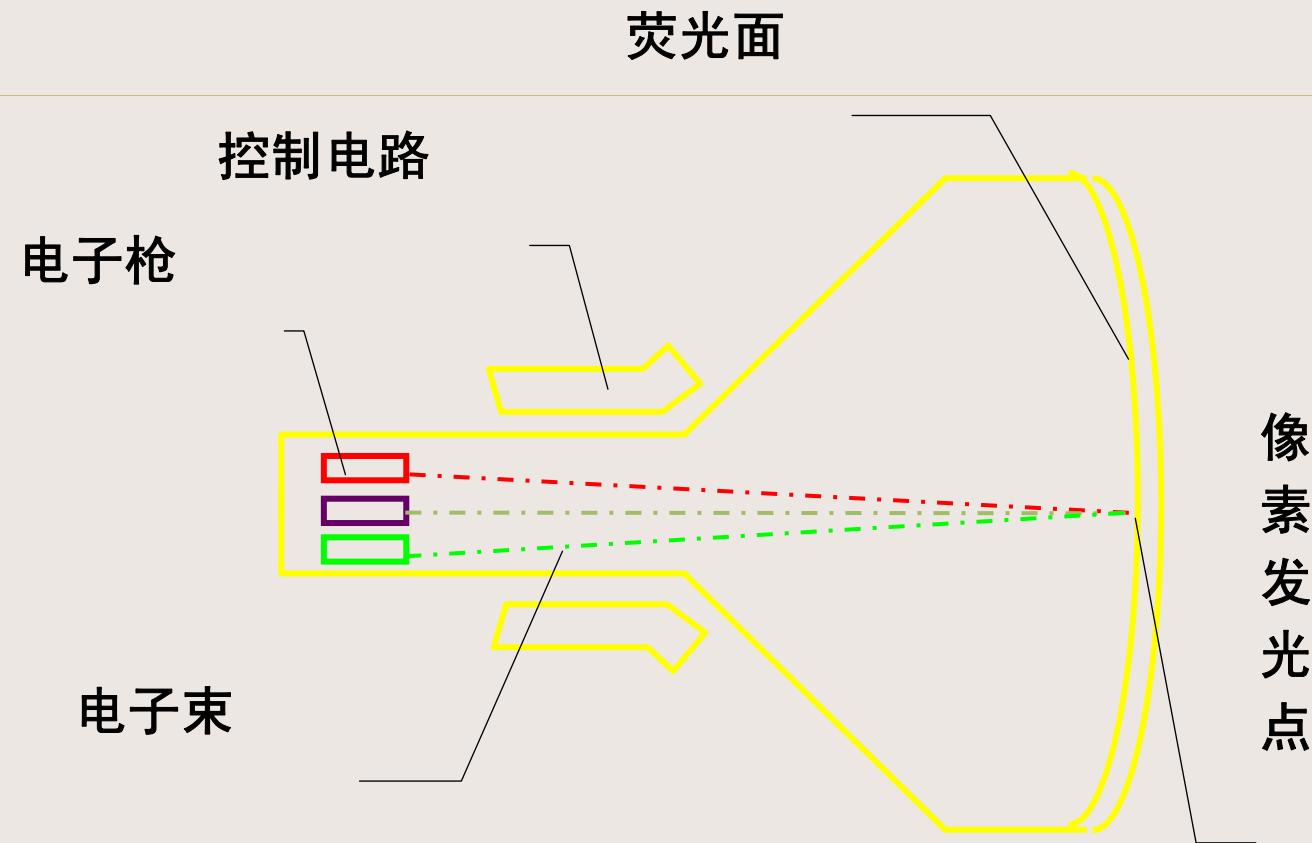
- 计算机显示器用红R、绿G、蓝B光的组合产生颜色，(R,G,B)的值唯一地确定在显示器上的显示颜色，如 (180, 70, 250) 产生一个偏绿的蓝色
- 三种颜色构成了三维空间坐标-- RGB颜色空间



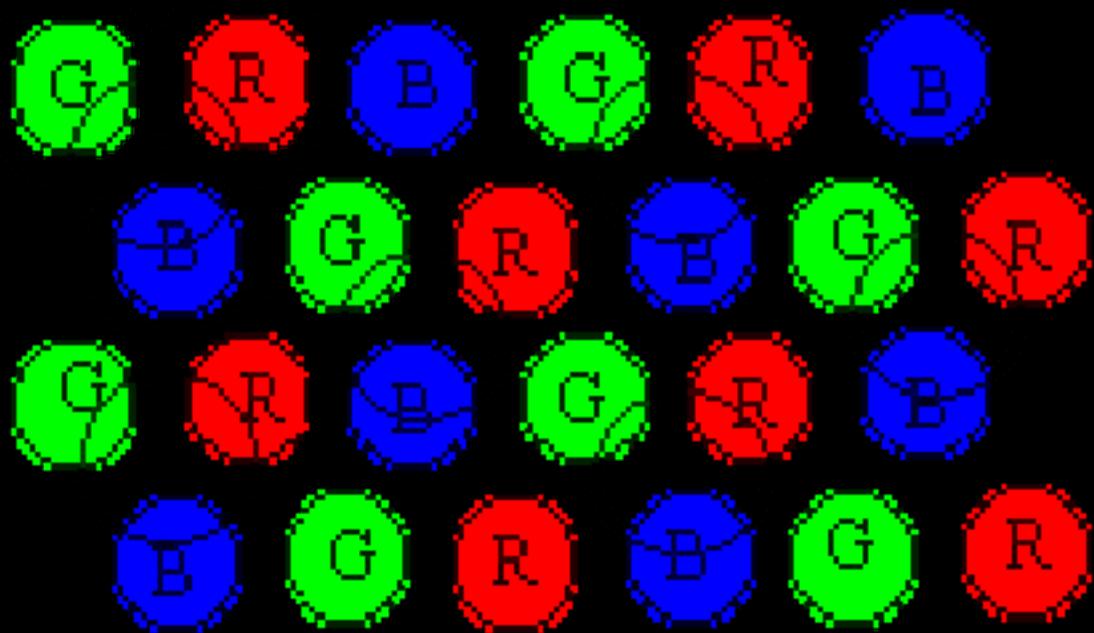
RGB色彩空间

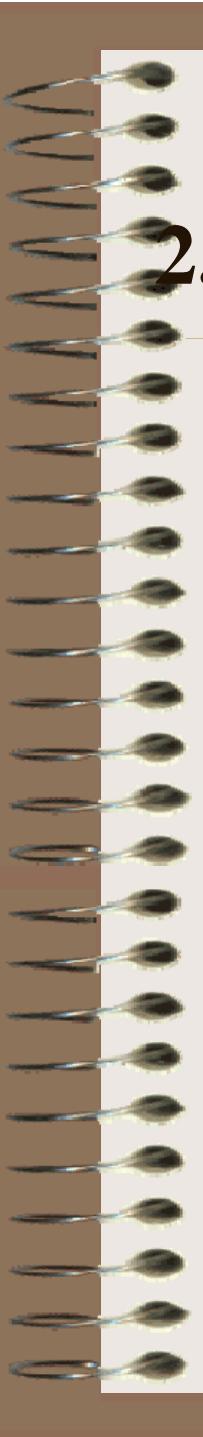


CRT的颜色产生



CRT结构示意图

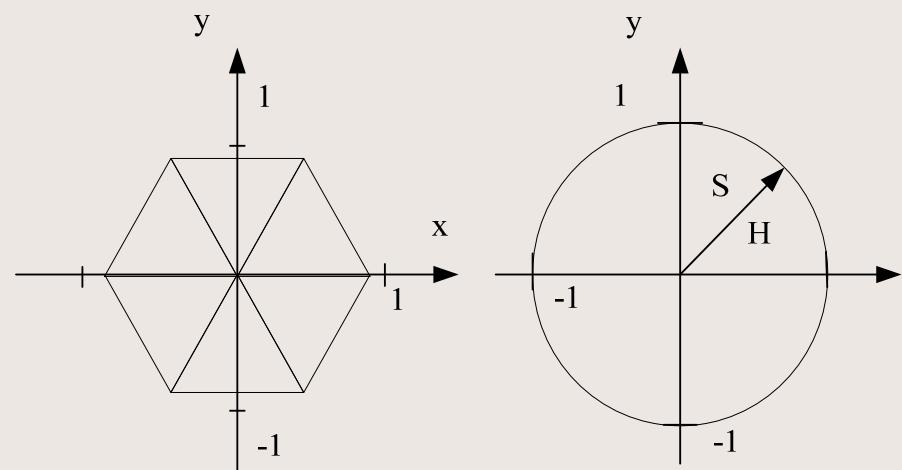
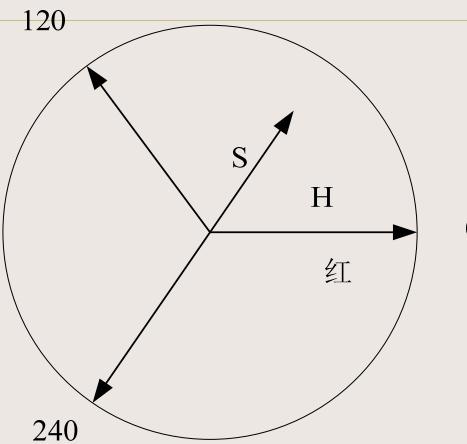
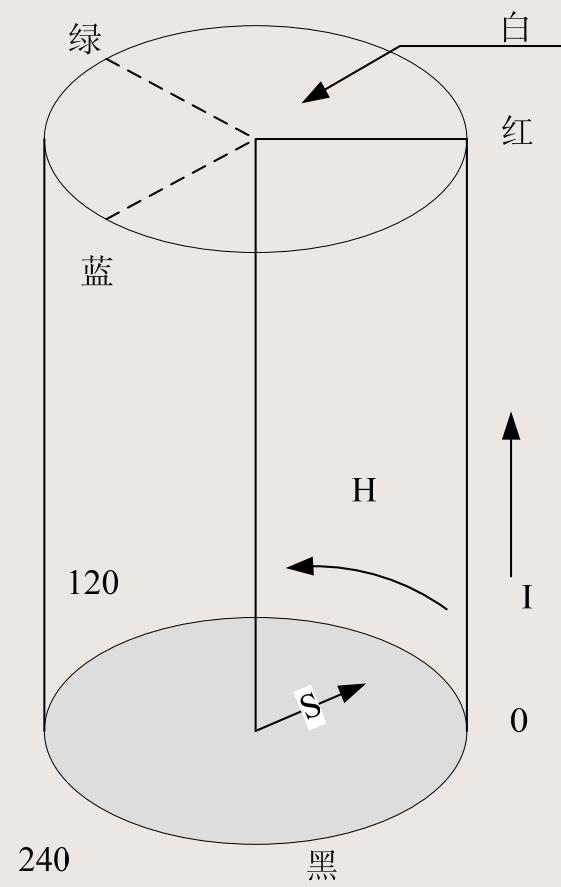


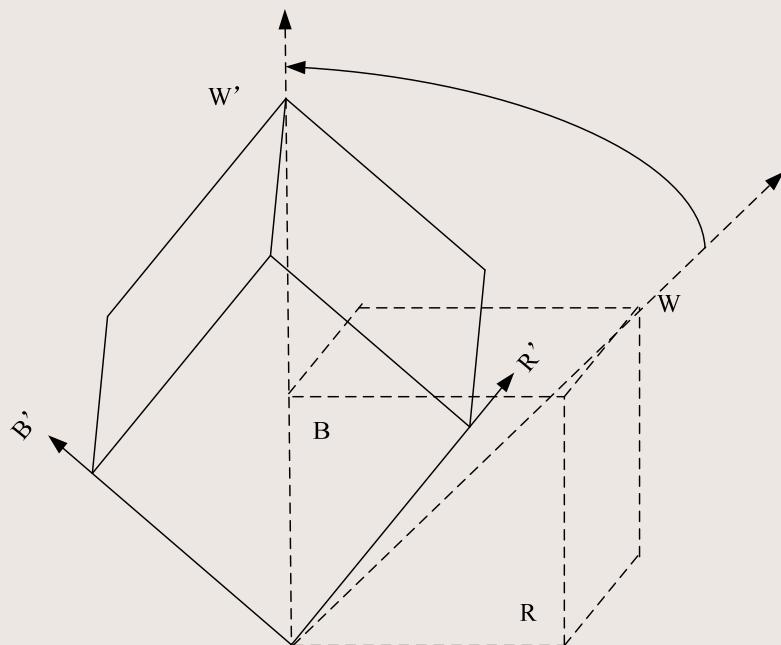


2. HSI(Hue, Saturation,Intensity)颜色空间

- HSI能减少彩色图像处理的复杂性。
- 合乎人对彩色的认识：
 色彩：色调、饱和度
 亮度：非彩色属性，对应黑白图像的灰度。
 色调和饱和度通称为色度，表示颜色类别与深浅程度。

HSI色彩空间和RGB色彩空间转换公式：





$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{6}}[2R - G - B] \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}[G - B] \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}[R + G + B] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \text{ang}(x, y) \end{cases}$$

$$I = \sqrt{3}(R + G + B)$$

$$S = \frac{\rho}{\rho_{\max}} = 1 - \frac{3 \min(R, G, B)}{R + G + B} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{I} \min(R, G, B)$$

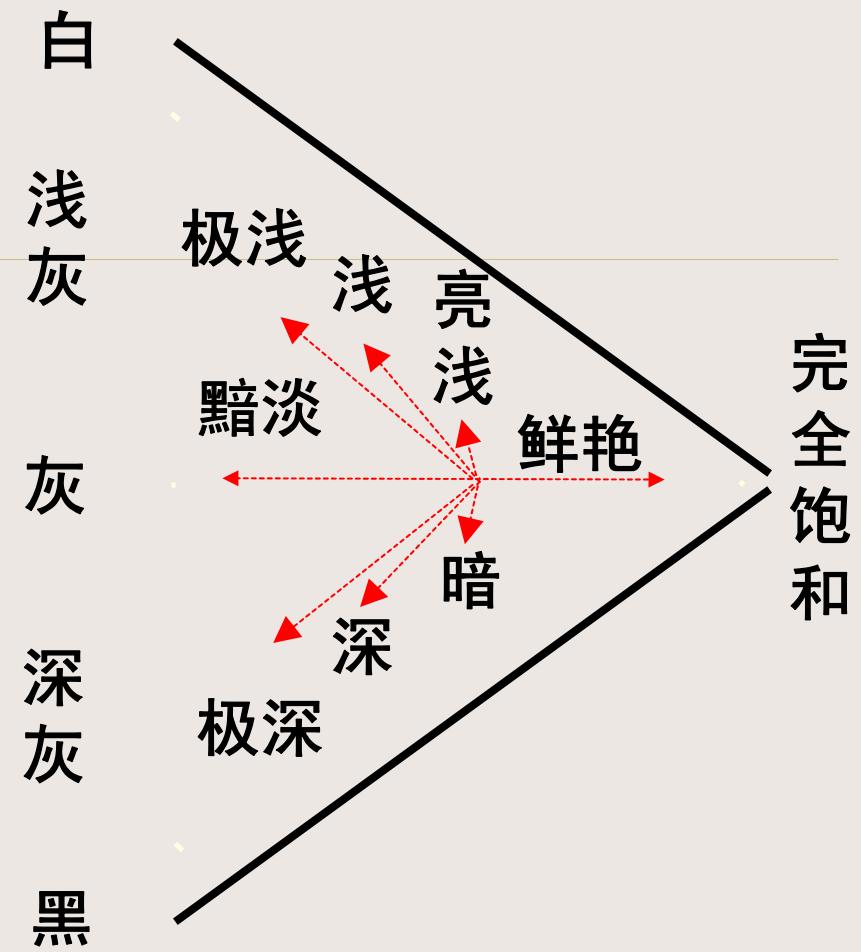
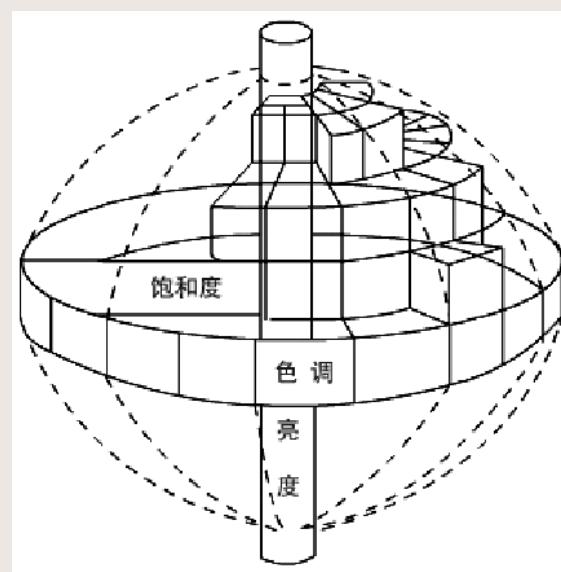
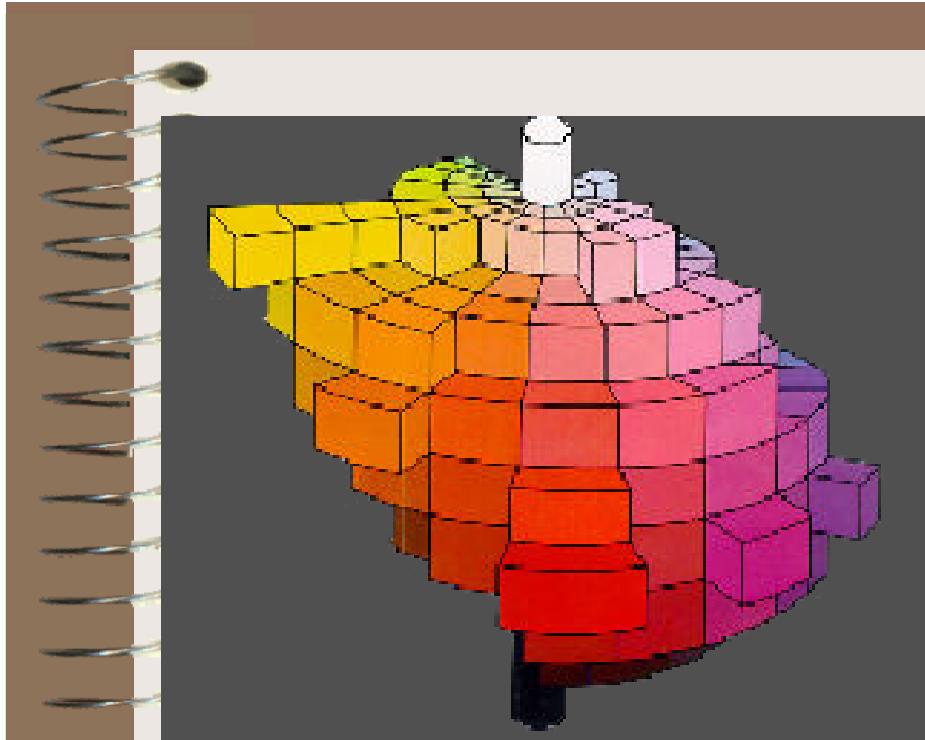
$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{\frac{1}{2} [R - G] + [R - B]}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}} \right]$$

$$H = \begin{cases} \theta & G \geq B \\ 2\pi - \theta & G \leq B \end{cases}$$

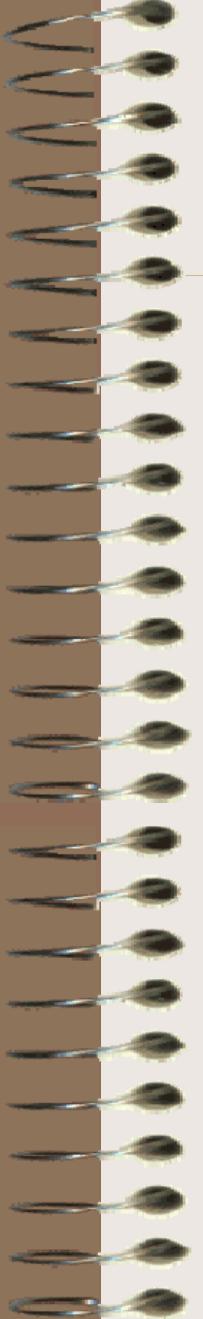
色相由角度等价

HSI色彩空间和RGB色彩空间转换公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{I}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{S \cos(H)}{\cos(60^\circ - H)} \right] \quad B = \frac{I}{\sqrt{3}} (1 - S) \quad G = \sqrt{3}I - R - B \quad 0^\circ \leq H \leq 120^\circ \\ G = \frac{I}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{S \cos(H - 120^\circ)}{\cos(180^\circ - H)} \right] \quad R = \frac{I}{\sqrt{3}} (1 - S) \quad B = \sqrt{3}I - R - G \quad 120^\circ \leq H \leq 240^\circ \\ B = \frac{I}{\sqrt{3}} \left[1 + \frac{S \cos(H - 240^\circ)}{\cos(300^\circ - H)} \right] \quad G = \frac{I}{\sqrt{3}} (1 - S) \quad R = \sqrt{3}I - G - B \quad 240^\circ \leq H \leq 360^\circ \end{array} \right.$$



HSI色彩空间模型



3. CMY(K)彩色空间

- 青色(Cyan), 洋红色(Magenta), 黄色(Yellow), 黑色(blacK) 颜料或油墨, 应用减色原理实现彩色。
- 彩色打印、彩色印刷
- CMYK: 在CMY的基础上, 增加黑色

$$\begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$



4. YUV (YCbCr) 色彩空间

YUV（亦称YCrCb）是被欧洲电视系统所采用的一种颜色编码方法（属于PAL）。

亮度信号Y和两个色差信号R-Y（即V）、B-Y（即U）

YUV主要用于优化彩色视频信号的传输，使其向后兼容老式黑白电视。与RGB视频信号传输相比，它最大的优点在于只需占用极少的频宽（RGB要求三个独立的视频信号同时传输）。

- YUV色彩空间与RGB色彩空间的转换关系:
-

$$Y = 0.299R + 0.587G + 0.114B$$

$$U = -0.147R - 0.289G + 0.436B$$

$$V = 0.615R - 0.515G - 0.100B$$

$$R = Y + 1.14V$$

$$G = Y - 0.39V - 0.58V$$

$$B = Y + 2.03U$$

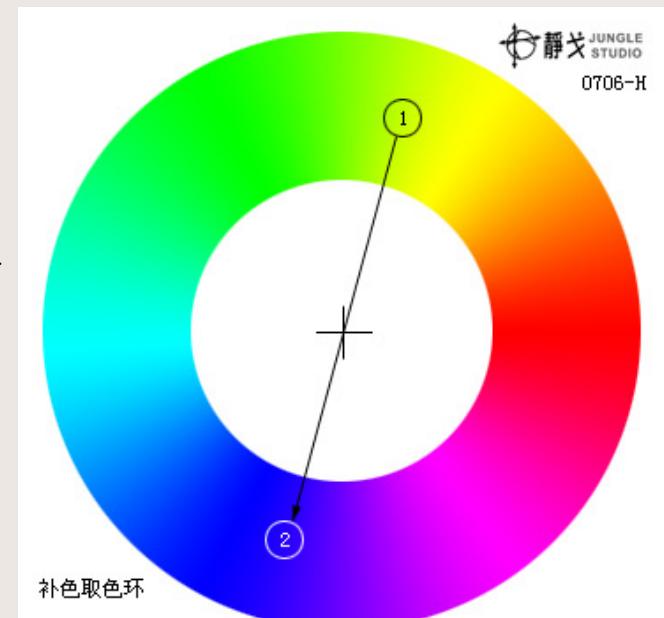
1.3 彩色图像处理

- 彩色变换：

$g(x, y) = T[f(x, y)]$, $f(x, y)$ 是彩色输入图像, $g(x, y)$ 是变换或处理过的彩色输出图像。

- 补色：

当两个色光混合成白色光时, 将这两个色光的主波长定义为互补波长。





- 彩色平衡:

原因: 三基色“不平衡”

步骤:

- 1. 检查是否所有灰色物体显示为灰色
- 2. 检查高饱和度的颜色是否有正常的色相
- 3. 线性灰度变换: 对R、G、B分别进行。

- 饱和度增强:

通过对每个像素的饱和度乘以一个大于1的常数，将使图像的彩色更为明显。同样，乘以一个小于1的常数会减弱彩色的明显程度。

- 色相变换:

色相是一个角度，为每个像素的色度加一个常数即所谓的色相变换。

第三章 投影变换图像校正

3.1 投影变换：

任一两坐标系： \bar{X}, \bar{Y}

$$\bar{X} : P = [X_1, X_2, X_3]^T$$

$$\bar{Y} : P_1 = [Y_1, Y_2, Y_3]^T$$

令两坐标系方向余弦为：

L_{11} —— y_1 与 x_1 之间的方向余弦（夹角余弦）

L_{12} —— y_1 与 x_2 之间的方向余弦

L_{13} —— y_1 与 x_3 之间的方向余弦

⋮

L_{ij} —— y_i 与 x_j 之间的方向余弦

得 \bar{Y} 与 \bar{X} 间关系:

$$y_1 = L_{11} X_1 + L_{12} X_2 + L_{13} X_3$$

$$y_2 = L_{21} X_1 + L_{22} X_2 + L_{23} X_3$$

$$y_3 = L_{31} X_1 + L_{32} X_2 + L_{33} X_3$$

如:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} \quad R = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

则有 $Y = R X$

$$y_1 = L_1 X = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} =$$

L_1 为 X 与 y_1 之间的方向余弦

到二维空间来理解：

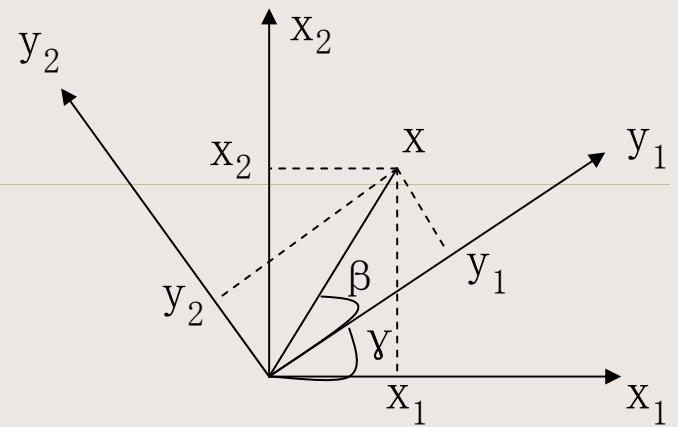
$$x_1 = x \cos(\beta + \gamma)$$

$$x_2 = x \sin(\beta + \gamma)$$

$$y_1 = x_1 \cos \gamma + x_2 \cos(90^\circ - \gamma)$$

$$= x \cos \beta$$

$$y_2 = -x_1 \sin \gamma + x_2 \cos \gamma$$



[三维坐标中] 绕 x_3 转 θ 角
则有：

$$L_{11} = \cos \theta$$

$$L_{12} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

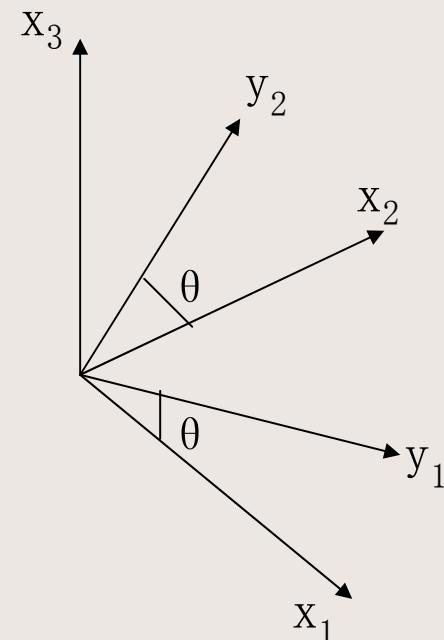
$$L_{13} = 0$$

$$L_{21} = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$L_{22} = \cos \theta$$

$$L_{23} = L_{31} = L_{32} = 0 = \cos 90^\circ$$

$$L_{33} = 1$$



即: $R = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

矩阵正交条件:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{或: } \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

旋转阵R为正交矩阵

二维时:
$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

有:
$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

三维时：

有： $L_{11}^2 + L_{12}^2 + L_{13}^2 = 1$

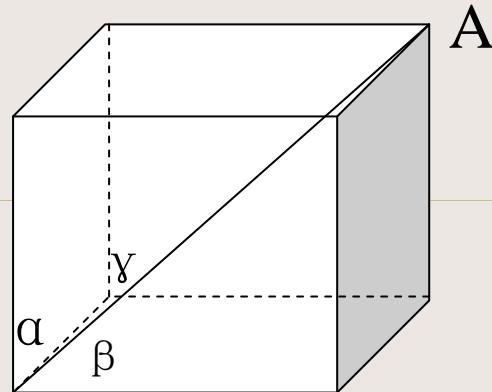
有：

$$A^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = A^2$$

正交阵 $R^T = R^{-1}$

有： $X = R^T Y$

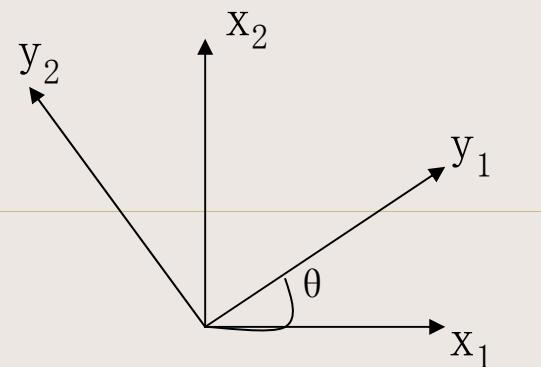
$$\begin{cases} x_1 = L_{11}y_1 + L_{21}y_2 + L_{31}y_3 \\ x_2 = L_{12}y_1 + L_{22}y_2 + L_{32}y_3 \\ x_3 = L_{13}y_1 + L_{23}y_2 + L_{33}y_3 \end{cases}$$



绕 x_3 、 x_2 、 x_1 旋转的矩阵、转角逆时针为正：

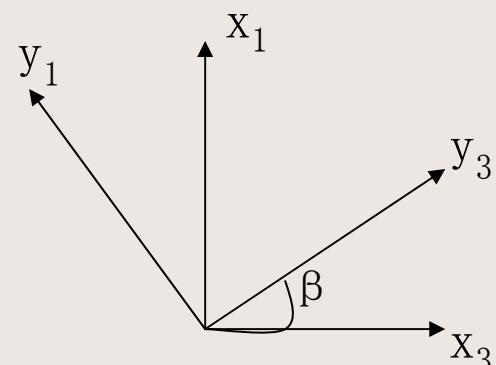
绕 x_3 轴转 θ 角

$$R_3 = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



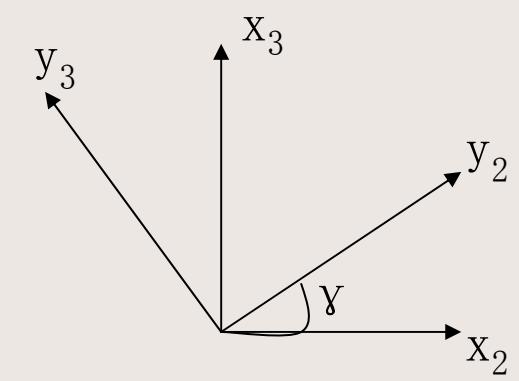
绕 x_2 轴转 β 角

$$R_2 = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix}$$



绕 x_1 轴转 γ 角

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix}$$



任意旋转：

$$R = R_i R_j R_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

注意到：

$$R = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \quad \text{只包括旋转。}$$

进一步的（旋转、位移、透视、缩放）如何呢？

[我们]引入齐次坐标系，扩展了非线性项—透视、位移

$$H = \left| \begin{array}{ccc|c} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ \hline m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} x\text{向} \\ y\text{向} \\ z\text{向透视变换结果} \\ \hline x\text{向位移} \end{array}$$

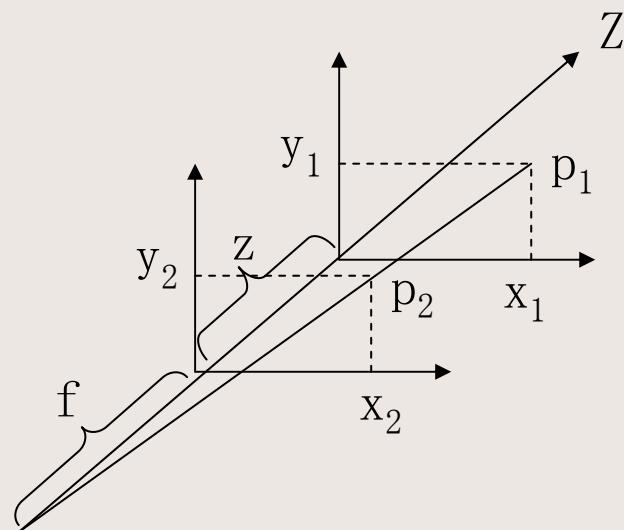
展开理解：

位移：
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + T_x, y + T_y, z + T_z, 1 \end{vmatrix}$$

透视：

$$\frac{x_2}{f} = \frac{x_1}{f+z}, \quad \frac{y_2}{f} = \frac{y_1}{f+z}$$

$$\text{得: } x_2 = \frac{fx_1}{f+z} = \frac{x_1}{1 + \frac{z}{f}}$$



焦点

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & y_1 & z & 1 & | & 1 \\
 & & & & & | & 1 \\
 & & & & & | & 0 & 1/f \\
 & & & & & | & 1 \\
 \hline
 & & & & & | & x_1 & y_1 & 0 & 1+z/f
 \end{array}$$

z的透视变换结果

$$W_H = 1 + \frac{z}{f}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 1 + \frac{z}{f} \end{vmatrix} = W_H \begin{vmatrix} \frac{x_1}{W_H} & \frac{y_1}{W_H} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} W_H$$

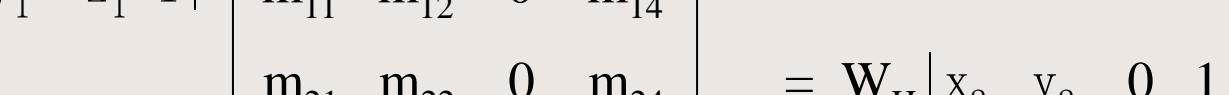
缩放：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{33} \\ m_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11}x_1 & m_{22}y_1 & m_{33}z_1 & m_{44} \end{vmatrix}$$

↓
分项比 ↓
总比例

由三维变到二维空间：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & 0 & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & 0 & m_{44} \end{vmatrix} = W_H \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



讨论:

- ①给定 $m_{i,j}$ 及空间点A, 可求C, 即由三维求二维投影结果。
 - ②由B、C求A, 即由两组不同的二维投影, 可以算出三维空间坐标, 用于立体测距 (两个相机相对关系确定, 如二目测距)
 - ③由A、C求B, 由足够的空间点对及其二维投影可算出两坐标系间的变换关系 ($m_{i,j}$)

[展开:]

$$W_H x_2 = m_{11}x_1 + m_{21}y_1 + m_{31}z_1 + m_{41}$$

$$W_H y_2 = m_{12}x_1 + m_{22}y_1 + m_{32}z_1 + m_{42}$$

$$W_H = m_{14}x_1 + m_{24}y_1 + m_{34}z_1 + m_{44}$$

令 $m_{44}=1$ ，消去 W_H 得：

$$m_{11}x_1 + m_{21}y_1 + m_{31}z_1 + m_{41} - m_{14}x_1x_2 - m_{24}y_1x_2 - m_{34}z_1x_2 = x_2$$

$$m_{12}x_1 + m_{22}y_1 + m_{32}z_1 + m_{42} - m_{14}x_1y_2 - m_{24}y_1y_2 - m_{34}z_1y_2 = y_2$$

12个系数，仅有二个方程，需要6对点可解。

立体测量原理:

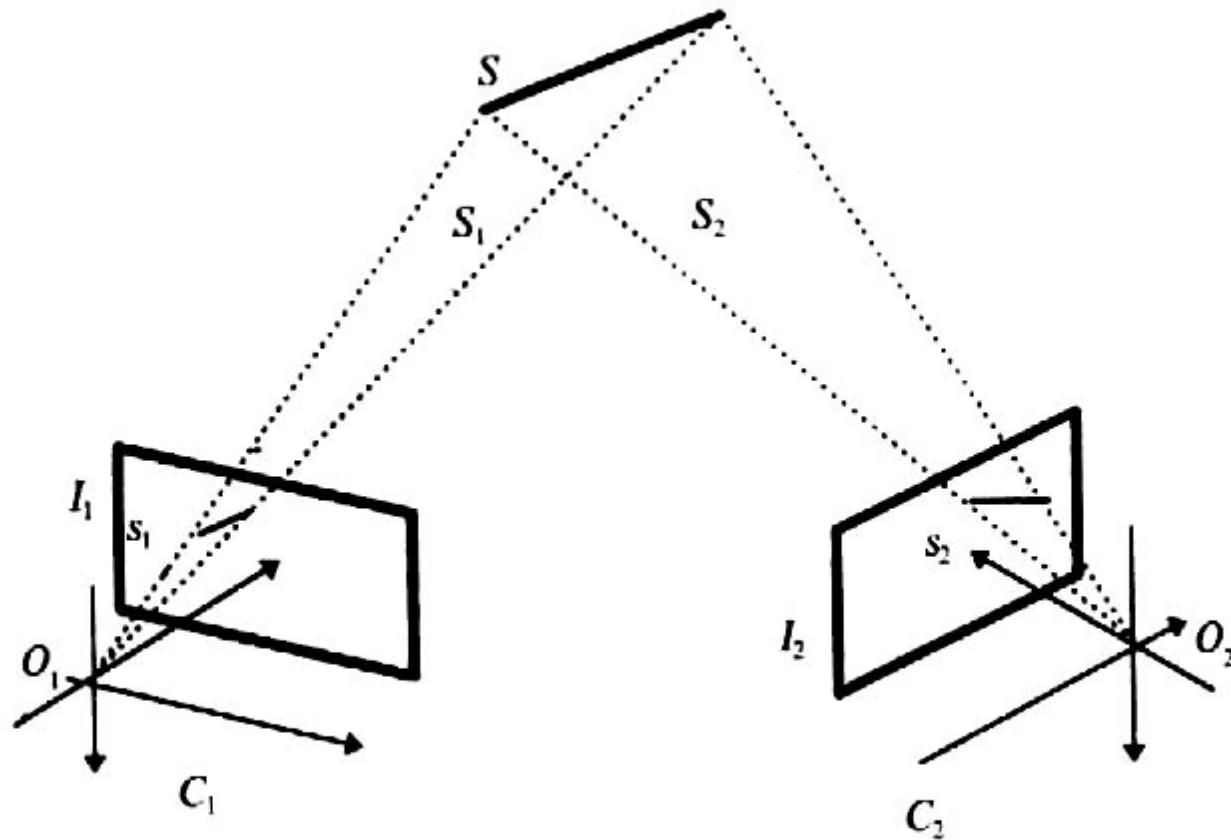


图 5.3 直线基元的三维重建

立体测量参照系统的标定：

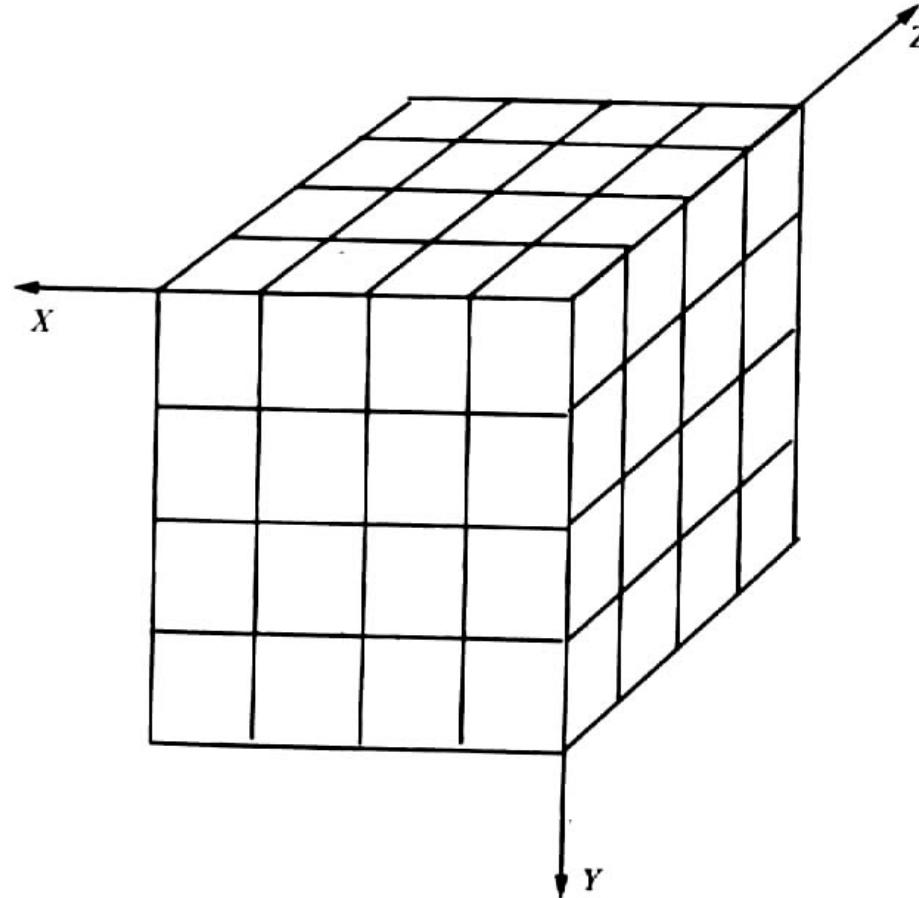


图 4.3 标定参照物

3.2 几何变换

[研究典型的变换关系、典型线性变换、二维面上的线性变换含义表示及特征。]

1) 点变换

比例变换: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} ax, by \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$

新坐标

旧坐标

原点变换: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

翻转: 绕x轴 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$

绕y轴 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x, y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$

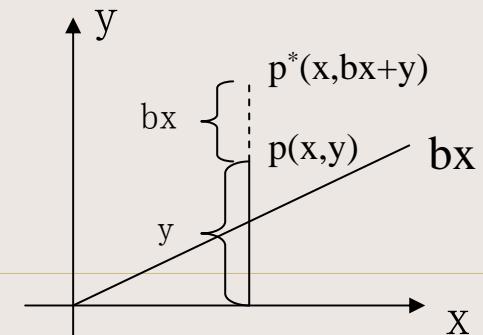
绕x=y轴 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y, x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$

剪移: $\begin{vmatrix} x & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x, bx+y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x^* & y^* \end{vmatrix}$$

同样: $\begin{vmatrix} x & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cx+y, y \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x^* & y^* \end{vmatrix}$$



2) 直线变换——两个点的变换

$$\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^* \\ B^* \end{vmatrix}$$

两条平行线变换后是否仍平行?

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax_1+cy_1 & bx_1+dy_1 \\ ax_2+cy_2 & bx_2+dy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^* \\ B^* \end{vmatrix}$$

原来线的斜率：

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m_1' \quad [\text{另一条平行线斜率}]$$

A*、B*的斜率：

$$m_2 = \frac{y_2^* - y_1^*}{x_2^* - x_1^*} = \frac{bx_2 + dy_2 - (bx_1 + dy_1)}{ax_2 + cy_2 - (ax_1 + cy_1)} = \frac{b + dm_1}{a + cm_1}$$

同理 m_1' 线变换后

$$m_2' = \frac{b + dm_1'}{a + cm_1'}$$

故 $m_2 = m_2'$ 平行线变换后，仍平行！

3) 面——三个点的关系, 方位面积关系

[注意：任意情况可由任意序列变换矩阵的组合，但顺序是不可变换的，否则结果是不同的。]

[下面讨论一下]单位正方形变换前后面积变化。

单位正方形：经 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 变换后面积关系：

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \xrightarrow{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{array}{c} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \end{array}$$

变换后面积：

$$\begin{aligned} A_T &= (a+c)(b+d) - 1/2 ab - 1/2 cd - c/2(b+b+d) - b/2(c+a+c) \\ &= ad - bc = \det[T] \text{----变换矩阵的行列式的值} \end{aligned}$$

[注：此式可适用于任意形状]

——任意多边形可理解为无数个小正方形组成。

前面没有讨论位移，加入位移后增加扩展项

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+m & y+n & 1 \end{vmatrix}$$

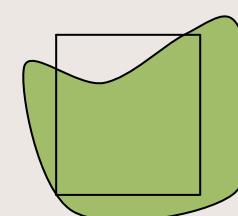
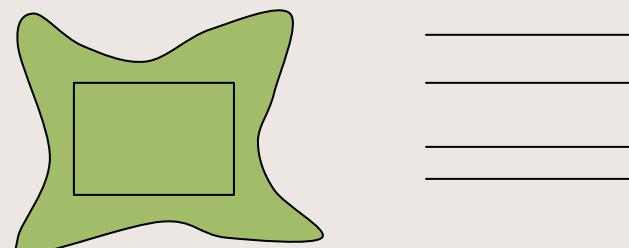
3.3 图像校正:

原因：有畸变。清除畸变[一般多用于遥感图像]

变形因素: \int 辐射量引起畸变

几何形状畸变

几何畸变: 透视效应, 光学系统畸变, 视角, 机械系统速度不均匀。

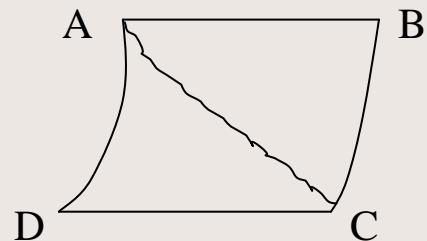


校正两种途径：

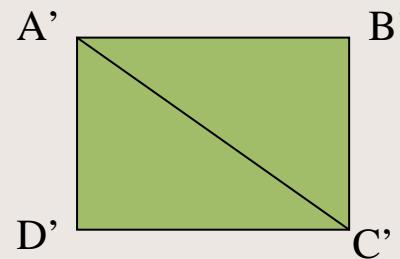
- ①根据畸变原因，建立数学模型（实际情况复杂不适用）
- ②参考点校正法——推算全图变形函数，前提是足够多的参考点。

3.4 几何校正方法：

1) 模型校正和综合校正：



B (旧) 实际采到



A (新)

可建立： $\underset{\text{校正后}}{\overset{\downarrow}{A}} = \underset{\text{变换矩阵}}{\overset{\downarrow}{H}} \underset{\text{待校正}}{\vec{B}}$

A—A'对应点对，由4个对应点对，求H，一般为N对

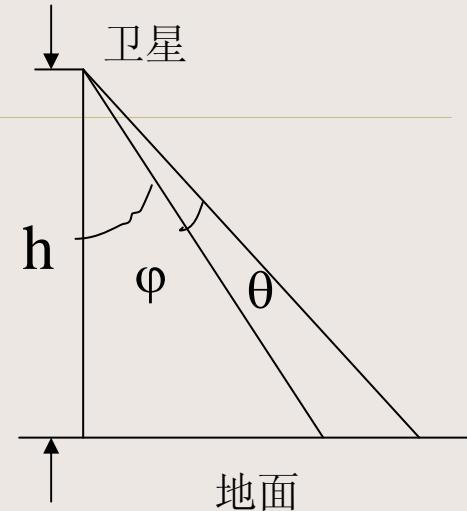
模型校正：即直接找出变换H

由 h 、 V 、 φ (相机安装角)、 θ ---- 模型H
(X 、 Y 、 Z) [同地面点校准]

评价：参数误差[大，不好确定]

如：卫星600KM高， φ 角误差是0.001弧度
(千分之一弧度)

地面误差： $600 \times 1000 \times 0.001 = 600M$



综合校正：

a) 局部插值法：任一小三角形，三对对应点对关系已知

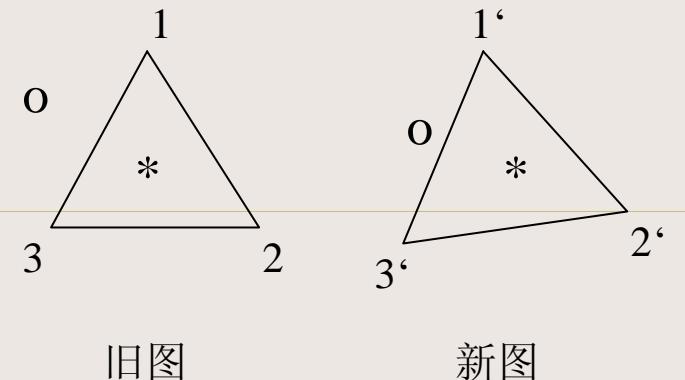
$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c \\ f \end{vmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x &= au + bv + c \\ y &= du + ev + f \end{aligned}$$

[只要3个对应点对，即可求得a,b,c,d,e,f系数]

分析[缺点]:

①线性关系[实际中不一定是线性]

②外插效果不好, 所以要求对应点对足够多, 能覆盖全图



b)拟合法:

$$\text{全图: } x = f_1(u, v)$$

$$y = f_2(u, v)$$

更复杂的, 全图是一个函数[一般用三阶函数]。

2) 基本问题:

两种途径:

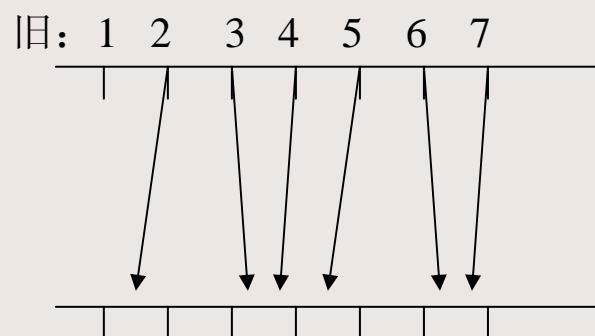
给定旧图坐标 (x, y) 找 (u, v)

$$\begin{cases} u = f_1(x, y) \\ v = f_2(x, y) \end{cases}$$

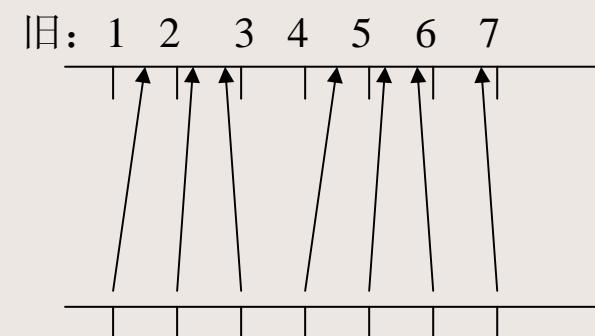
给定新图坐标 (u, v) 找 (x, y)

(可免去多余或缺少点) (x, y)

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

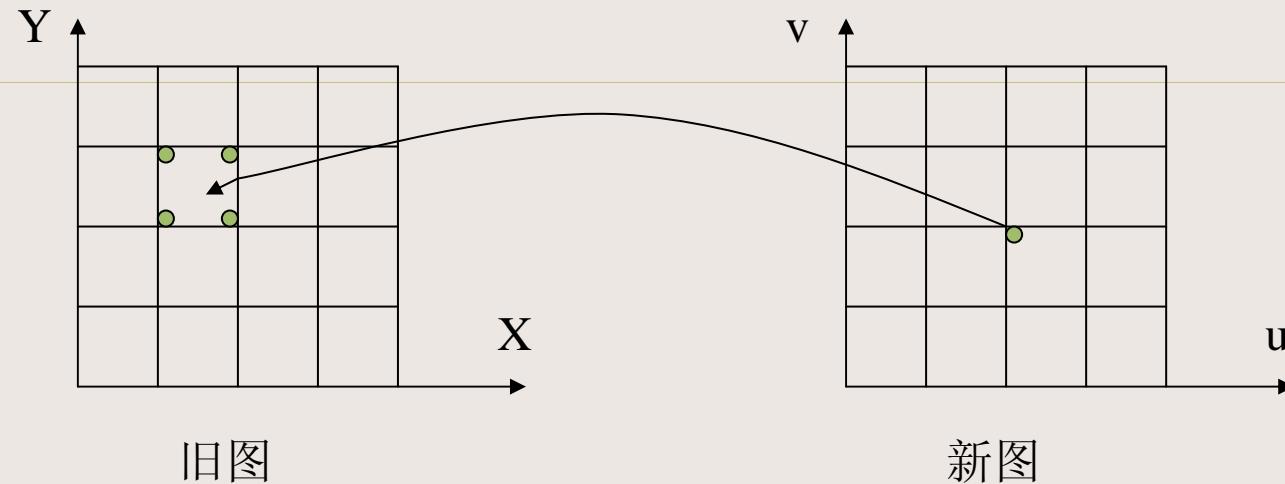


(整数点才有意义)



(可免去多余或缺少点)

新--旧图带来非整数点问题:



解决此问题，需要坐标变换、灰度插值。

3) 典型坐标变换方法:

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}$$

g_1, g_2 函数 [函数可逼近任意函数]

$$\begin{cases} x = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} k_{1,ij} u^i v^j \\ y = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} k_{2,ij} u^i v^j \end{cases}$$

N: 多项式阶数, 一般N=3

假设N=2时:

$$x = k_{100} + k_{110}u + k_{101}v + k_{120}u^2 + k_{102}v^2 + k_{111}uv$$

$$y = k_{200} + k_{210}u + k_{201}v + k_{220}u^2 + k_{202}v^2 + k_{211}uv$$

k—12个 $(x, y) \rightarrow (u, v)$ 6对即可 (实际上用12对)

设坐标点数R，当R > 6，写成矩阵形式。

$$\bar{X} = UK_1$$

$$\bar{Y} = UK_2$$

$$\begin{vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^R \end{vmatrix} = U \begin{vmatrix} k_{100} \\ k_{110} \\ k_{101} \\ k_{120} \\ k_{102} \\ k_{111} \end{vmatrix} \quad U = \begin{vmatrix} 1 & u^1 & v^1 & (u^1)^2 & (v^1)^2 & u^1 v^1 \\ 1 & u^2 & v^2 & (u^2)^2 & (v^2)^2 & u^2 v^2 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & u^R & v^R & (u^R)^2 & (v^R)^2 & u^R v^R \end{vmatrix}$$

U维数： [R * 6]

当 $R > 6$ 时超定方程求解, 用最小二乘解:

误差:

$$e = UK_1 - X$$

$$J(K_1) = |UK_1 - X|^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_1} = 2U^T(UK_1 - X) = 0$$

$$\text{求得 } : K_1 = (U^T U)^{-1} U^T X$$

$$K_2 = (U^T U)^{-1} U^T Y$$

R对对应点对取法: $N=2$ 时 $R \gg 6$

$N=3$ 时 $R \gg 10$

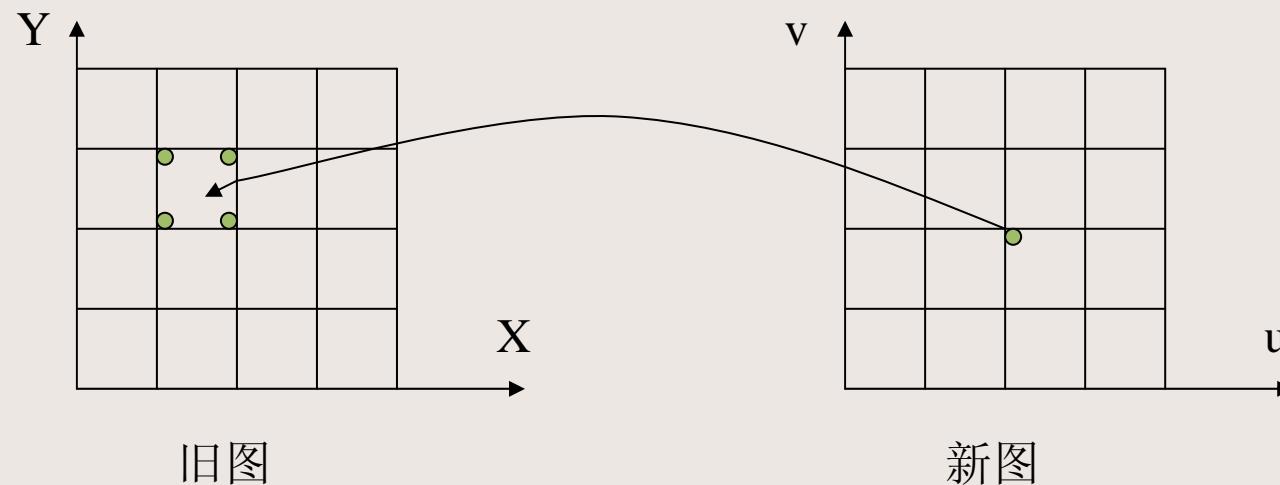
$$X = a + bu + cv + du^2 + ev^2 + fuv + gu^2v + huv^2 + Iu^3 + Jv^3$$

$$Y = \dots \dots$$

给定 $(u, v) \rightarrow (x, y)$ 需 $20 \times 2 = 40$ 乘法

如何加速？

4) 灰度插值



非整数坐标，灰度如何选取？

三种途径：

① 近邻法: $(u, v) \rightarrow (x, y) \quad (\text{int})(x+0.5); \quad (\text{int})(y+0.5)$

整数 小数

[缺点: 校正后的图象亮度有明显的不连续性]

② 双线性插值

$$f(0, y) = f(0, 0) + y[f(0, 1) - f(0, 0)]$$

$$f(1, y) = f(1, 0) + y[f(1, 1) - f(1, 0)]$$

$$f(x, y) = f(0, y) + x \cdot [f(1, y) - f(0, y)]$$

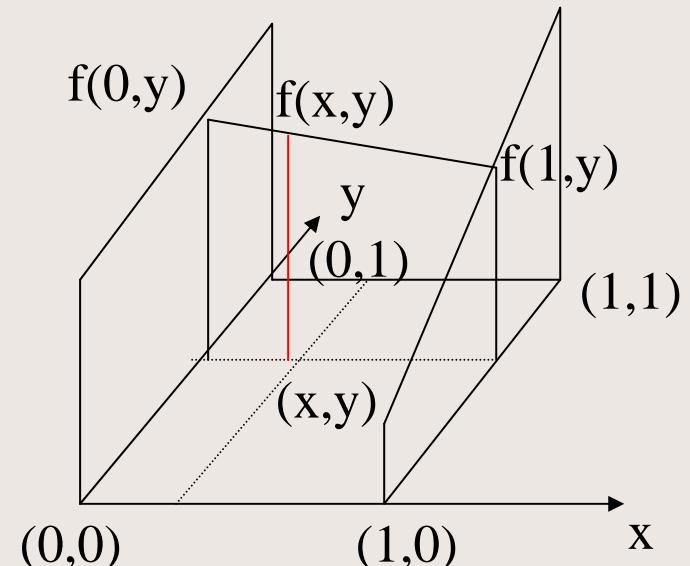
$$= f(0, 0) + [f(1, 0) - f(0, 0)]x$$

$$+ [f(0, 1) - f(0, 0)]y + [f(1, 1) - f(0, 0)$$

$$- f(0, 1) - f(1, 0)]xy$$

$$= ax + by + cxy + d \quad \text{双曲抛物面}$$

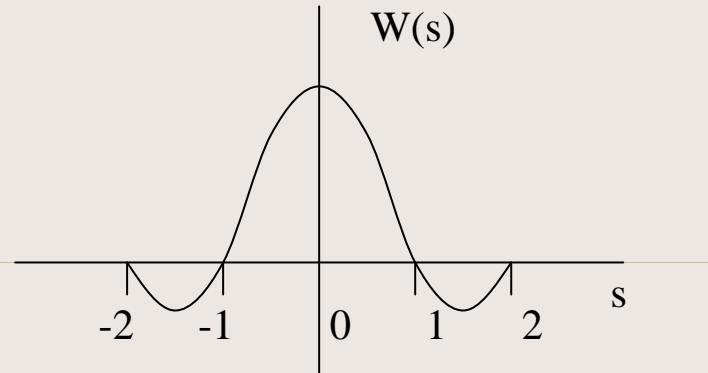
[双线性内插法具有低通滤波性质, 使
高频分量受损, 图象轮廓模糊]



③立方卷积插值

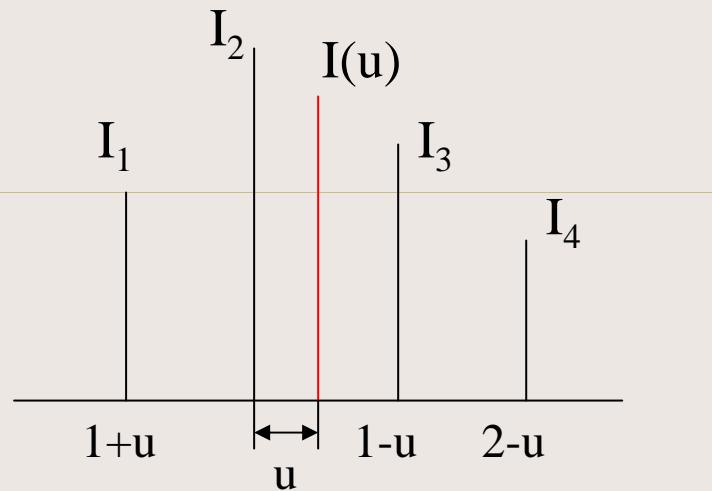
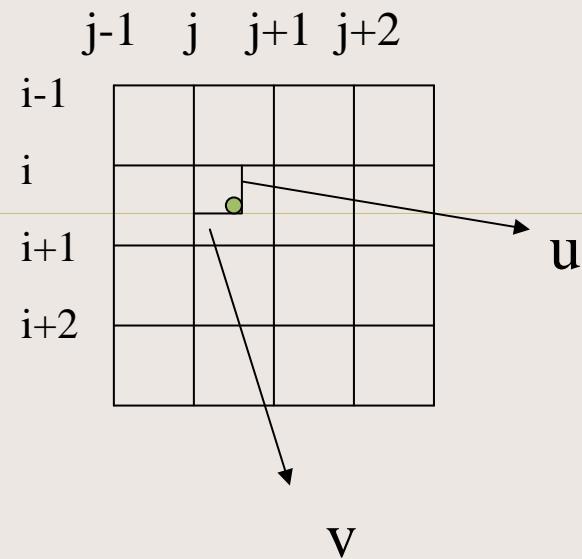
理论上最佳的函数。Sinc(s)

$$\text{sinc}(s) = \frac{\sin s}{s}$$



用三次多项式W(S)来逼近它

$$W(S) = \begin{cases} |S|^3 - 2|S|^2 + 1 & 0 \leq |S| < 1 \\ -|S|^3 + 5|S|^2 - 8|S| + 4 & 1 \leq |S| < 2 \\ 0 & |S| > 2 \end{cases}$$



计算时周围16个邻点

[u方向上]

$$\begin{aligned}
 I(u) &= w(u)I_2 + w(1+u)I_1 + w(1-u)I_3 + w(2-u)I_4 \\
 &= (I_4 - I_3 + I_2 - I_1)u^3 - (I_4 - I_3 + 2I_2 - 2I_1)u^2 + (I_3 - I_1)u + I_2
 \end{aligned}$$

分别在行列方向样条插值

二维: $f(u,v) = [A] [B] [C]$

$$A = \begin{vmatrix} w(1+u) \\ w(u) \\ w(1-u) \\ w(2-u) \end{vmatrix} \quad T = \begin{vmatrix} w(1+v) \\ w(v) \\ w(1-v) \\ w(2-v) \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} f(i-1, j-1) & f(i-1, j) & f(i-1, j+1) & f(i-1, j+2) \\ f(i, j-1) & f(i, j) & f(i, j+1) & f(i, j+2) \\ f(i+1, j-1) & f(i+1, j) & f(i+1, j+1) & f(i+1, j+2) \\ f(i+2, j-1) & f(i+2, j) & f(i+2, j+1) & f(i+2, j+2) \end{vmatrix}$$

本算法计算量大，但可以克服前两方法缺点，且精度高。

5) 如何提高运算速度

第四章 图像增强——灰度图像处理

4.1 概述

- ❖ [原因：从实际景物转换成图像信息，在图像的生成、传输、或变换过程中，由于多种因素的影响，输出图像的质量多少会有所降低或称退化。]
- ❖ 灰度图像处理：
 - 同类处理——不压缩原图像的灰度层次，如滤波、增强。
 - 非同类处理——描述，将多灰度图变为二值图，如分割。
- ❖ 增强：（enhancement）突出所关心的信息，改善图像视觉效果。
- ❖ 恢复：（restoration）恢复退化图像的本来面目，忠实原图像。
- ❖ 方式：
 - 点处理
 - 局域处理
 - 全局处理

4.2 图像的统计特征

- 把图像看作随机过程，则可做一阶及二阶统计。
一阶：单个象素特征。二阶：一对象素特征。

- 1)一阶统计特征：

P 代表坐标， Z 为灰度， $P(P, Z)$ 象素。

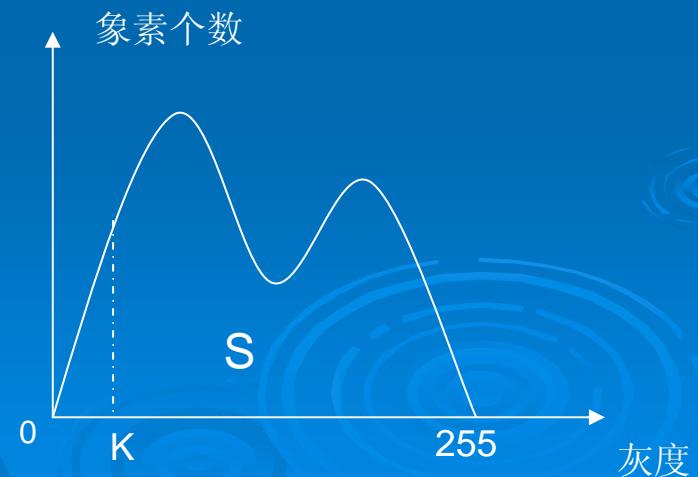
对同一对象的不同观测结果，随机过程，略去了随机性变化，坐标位置关系，简化成直方图(Histogram)。

纵坐标：象素个数/某灰度[也可用百分比]

横坐标：灰度 (0~255)

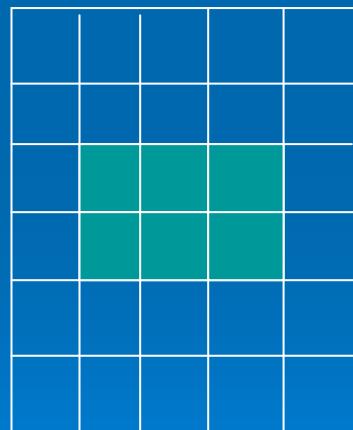
总面积：全图象素数

$S=1$

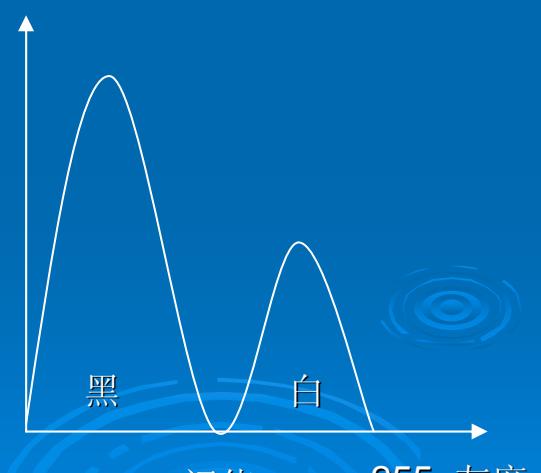
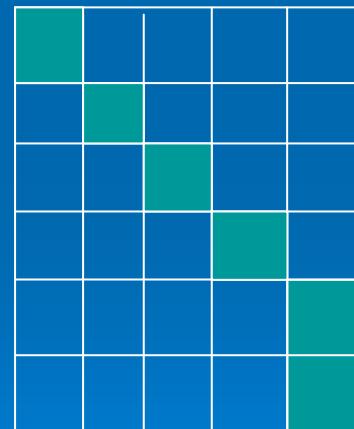
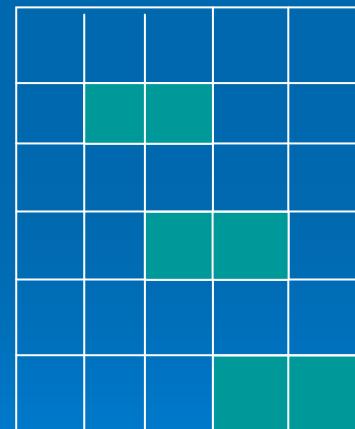


- ❖ 直方图：离散状态下图像灰度的概率密度分布。
- ❖ 说明：图像——直方图
[不可逆变换，多对一的变换]
- ❖ 直方图是多对一的映射结果，即多个图像可以生成相同的直方图，因此直方图作为一阶统计特征未反映相邻点之间的关系。
但反映了图像的灰度散布范围等特征，在很多场合下，往往是重要特征。

例：



六个像素



黑板(加墙)的直方图

2) 二阶统计特征——图像两象素之间关系:

$P2(P, Q, Z, Y)$

P, Q 为两个象素的位置——绝对位置——相对位置

Z, Y 为两个象素的灰度

[引入简化形式, 即认为与 P, Q 之绝对位置无关, 而仅与其相对位置有关, 称共存事件矩阵—— coocurrence matrices]

共存事件矩阵: $Cr(i, j)$

r —— P, Q 点的相对关系, i, j —— 两个象素的灰度。[R 与 相对距离及方位有关各种组合甚多。] d 及 θ

$Cr(i, j, d, \theta)$ 。

$i \backslash j$	0	1	2	255
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)		
1	(1,0)	(1,1)			
2	(2,0)				
.					
255					

135°	90°	45°
	斜线	
	0°	

双向 (正负) 均算

$\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$

$d = 1, 2, 3, \dots$

满足 d, θ 关系, 灰度分别为 (i, j) 的象元对数。整个数组 256×256

256×256

[一般情况下,考虑相邻象素间关系,取d=1, $\theta=0^\circ$ 时]

$$C_r(i, j)_{\theta=0, d=1} = \#\{(k, l), (m, n) \mid |k - m| = 1, |l - n| = 0, I(k, l) = i, I(m, n) = j\}$$

举例:

原图

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

C_r

	j	0	1	2	3
i					
0	0	3	0	3	
1	3	0	3	0	
2	0	3	0	3	
3	3	0	3	0	

$$d=1, \theta=0$$

0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

	j	0	1	2	3
i					
0	6	0	0	0	
1	0	6	0	0	
2	0	0	6	0	
3	0	0	0	6	

- 共存事件矩阵特点：
 - ①对角线 $Cr(k, k)$ 大致反映了灰度为 K 的面积大小；
 - ②非对角线的 $Cr(k, j)$ 大致反映了灰度值为 k, j 象元的边界长；
 - ③远离对角线项的大小反映图像对比度大小。
- [进一步引入一些变换参数。]

$$p(i, j) = \frac{c_r(i, j)}{\sum_s c_r(i, j)} \quad \sum p(i, j) = 1$$

综合参数：

均匀度: $f_1 = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} p(i, j)^2$ [反映灰度分布均匀程度]

对比度: $f_2 = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 \sum_{|i-j|=n} p(i, j)$ [反映对比度大小]

灰度线性相关度: $f_2 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{J=0}^{N-1} [i \cdot j \cdot p(i, j)] - u_x u_y}{\sigma_x \sigma_y}$

[灰度相关值]

上式中 $u_x, u_y, \sigma_x, \sigma_y$ 分别表示其共存事件矩阵沿行列方向的均值及标准差。

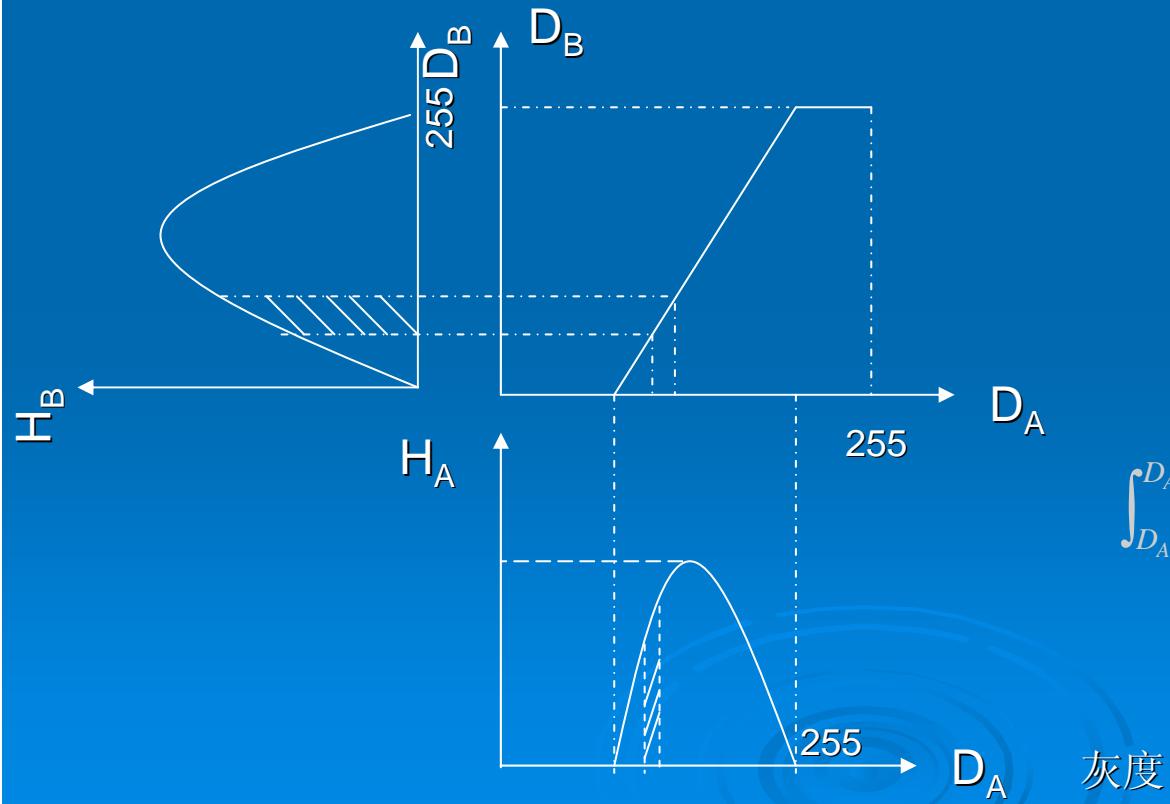
共存事件矩阵是纹理特征的描述工具。

4.3 直方图处理（点处理，辐射变换）

[通过调整图像的直方图,达到所需增强的目的。]

1) 灰度变换法:

[由于光照不足, 原图象灰度范围窄, 看不清, 直方图拉伸后灰度相差加大, 分辨清晰。]



$$D_B = f(D_A)$$

[可将一直方图变另一直方图]

$$\text{即: } H_A(D_A) \longrightarrow H_B(D_B)$$

直方图下总面积不变为1, 由概率论知:

$$\int_{D_A}^{D_A+dD_A} H_A(D_A) dD_A = \int_{D_B}^{D_B+dD_B} H_B(D_B) dD_B$$

$D_B=f(D_A)$ 常见的三种变换曲线：

- 线性: $D_B=aD_A+b$ (分段线性)[突出感兴趣目标, 抑制不感兴趣目标]
- 对数曲线: $D_B=a * \lg(D_A+b)$ [小灰度展开, 大灰度压缩]
- 指数曲线: $D_B=D_A^{**a}+b$ [大灰度展开, 小灰度压缩]



[具体编程实现引入查找表 (lookup table) 概念]

- 图象 512×512 大小, 需 $256KB$ 次运算, 太慢
- 注意图象值输入: 256级[0~255]
输出: 256级[0~255] 输入到输出是映射关系

```
int i,j;  
char I[512][512],LUT[256];  
for (i=0;i<256;i++)  
    LUT[i]=pow(i,a)+b  
for (i=0;i<512;i++)  
    for(j=0;j<512;j++)  
        I[i][j]=LUT[I[i][j]];
```

仅需256次指数运算，节约了运算时间

2) 直方图均衡:

[如右图, 直方图可用灰度为256, 但仅用了2/3, 即可用灰度级别未充分利用, 一种可能的充分利用多灰度方法是直方图越平越好。] 多灰度值点数均摊。

$$H_B = 1/m$$

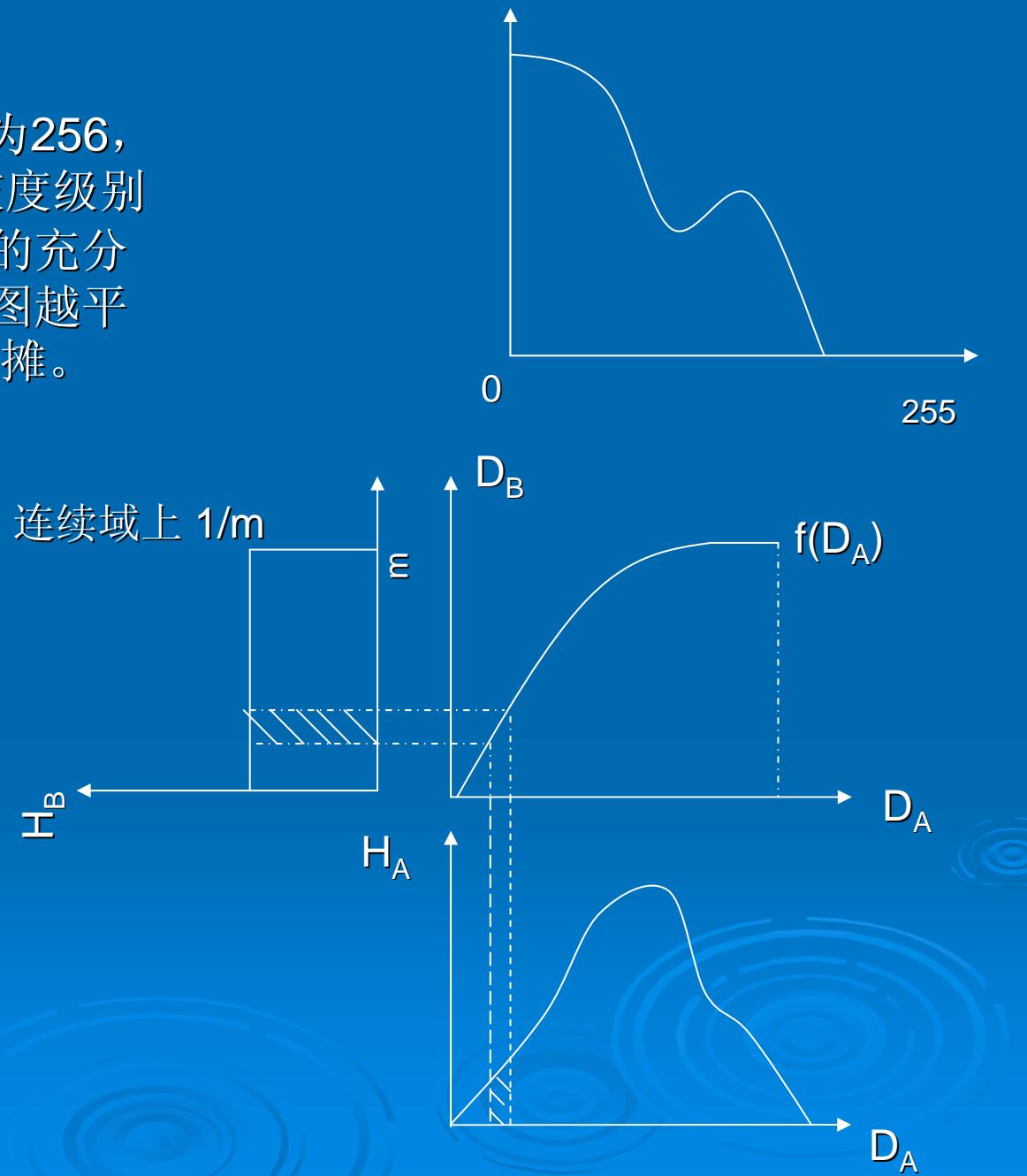
$$\text{由: } H_A dD_A = H_B dD_B$$

$$D_B = f(D_A), dD_B = df$$

$$H_A dD_A = 1/m df$$

$$df = m H_A dD_A$$

$$f = \int m H_A dD_A$$



- 上述结论可推广到离散域上，一幅图像总像素数为n，分L个灰度级， n_k 代表第K灰度级 r_k 出现的频数，则第K灰度级出现概率：

$$\Pr(r_k) = n_k/n \quad (k=0, 1, \dots, L-1)$$

- 此时变换函数为：

$$D_B(k) = \sum_{j=0}^k P_r(r_j) = \sum_{j=0}^k \frac{n_j}{n}$$

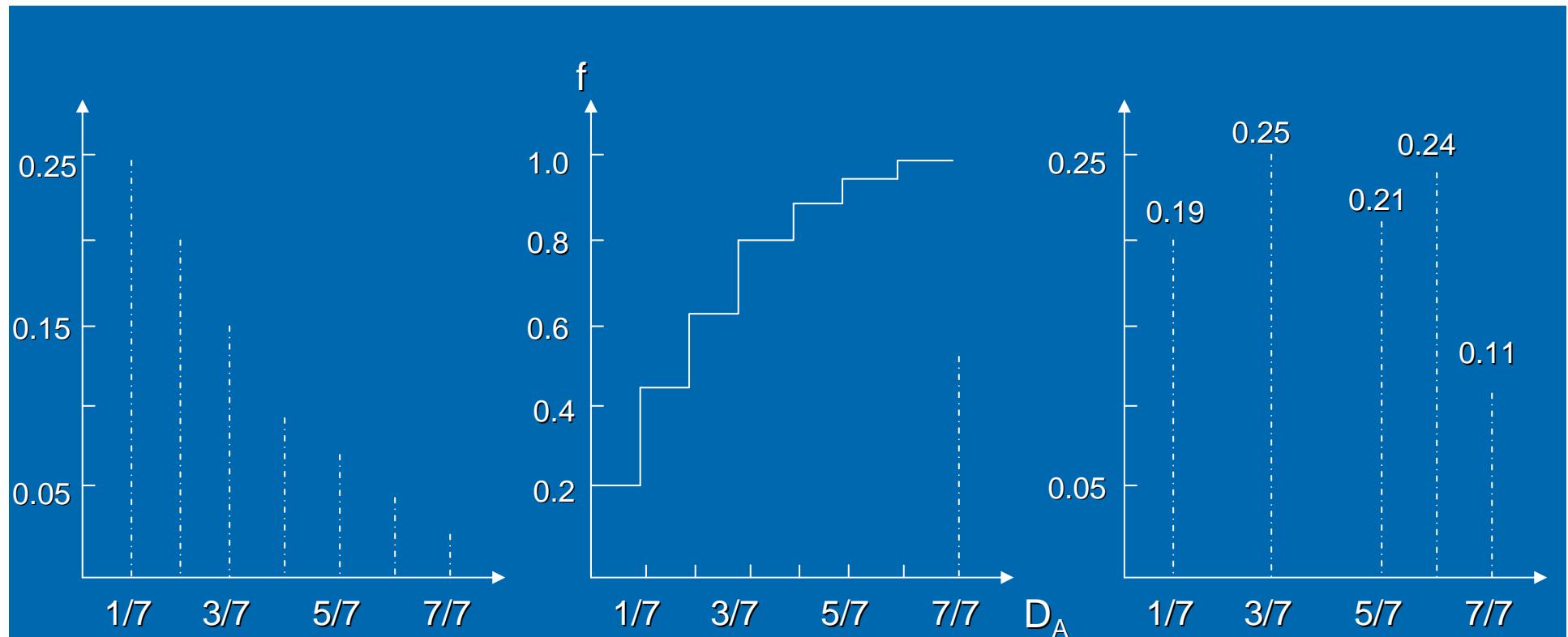
若某一灰度Z是此平均值之K倍，则需将其分散到K个灰度上去，即一对多的映射。

- 将Z映射至 $(Z_1+Z_K)/2$ 灰度上，不保证均匀平的；
- 将Z随机分配到 Z_1, Z_K 中，此时将损失对比度；
- 将Z分配到与邻点平均值相近的 $[Z_1, Z_K]$ 之灰度，这可能使边缘变模糊及计算量大。 [实用第一条]

8个灰级，总计 $64*64=4096$ 点
注意：离散均衡不可能拉平

D_A	n_k	$P_r(r_k)$	f	取成整数倍	均衡后直方图
0	790	0.19	0.19	1/7(0.14)	0.19
1/7	1023	0.25	0.44	3/7(0.428)	0.25
2/7	850	0.21	0.65	5/7(0.714)	0.21
3/7	656	0.16	0.81	6/7(0.857)	0.16+0.08 =0.24
4/7	329	0.08	0.89	6/7(0.857)	
5/7	245	0.06	0.95	7/7(1.00)	0.06+0.03 +0.02 = 0.11
6/7	122	0.03	0.98	7/7(1.00)	
7/7	81	0.02	1.00	7/7(1.00)	

[仅存5个灰级，宏观拉平，微观不可能平，层次减少，对比度提高。]



原图

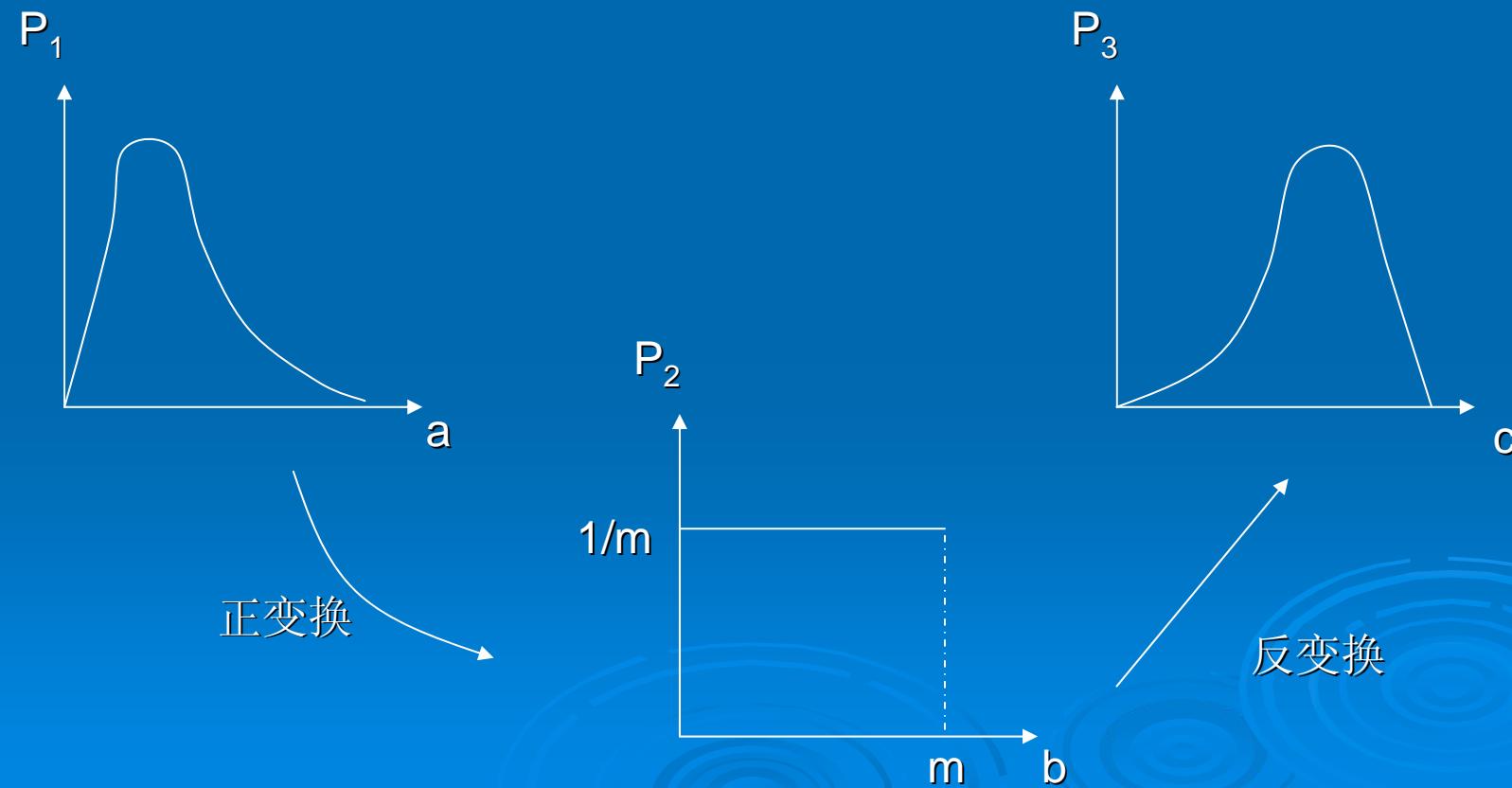
变换图

均衡后

3) 直方图匹配

[新直方图与已有直方图匹配，使两直方图一致]

[希望增强后的图像，其灰度级分布不是均匀的，而是具有规律形状的直方图，这样可突出感兴趣的灰度范围]



$$p_1 \longrightarrow p_2 = 1/m, b = m \int p_1(a) da = m P_1(a)$$

$$p_3 \longrightarrow p_2 = 1/m, b = m \int p_3(c) dc = m P_3(c)$$

$$c = P_3^{-1}(b/m) = P_3^{-1}(m P_1(a)/m) = P_3^{-1}[P_1(a)]$$

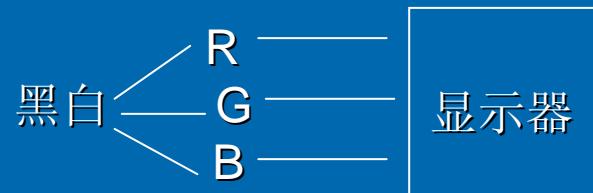
由 $a \longrightarrow c$ 关系。

$[p_1(a)$ 先变换到平的, 再由平的变换到 $p_3(c)]$

4) 伪彩色

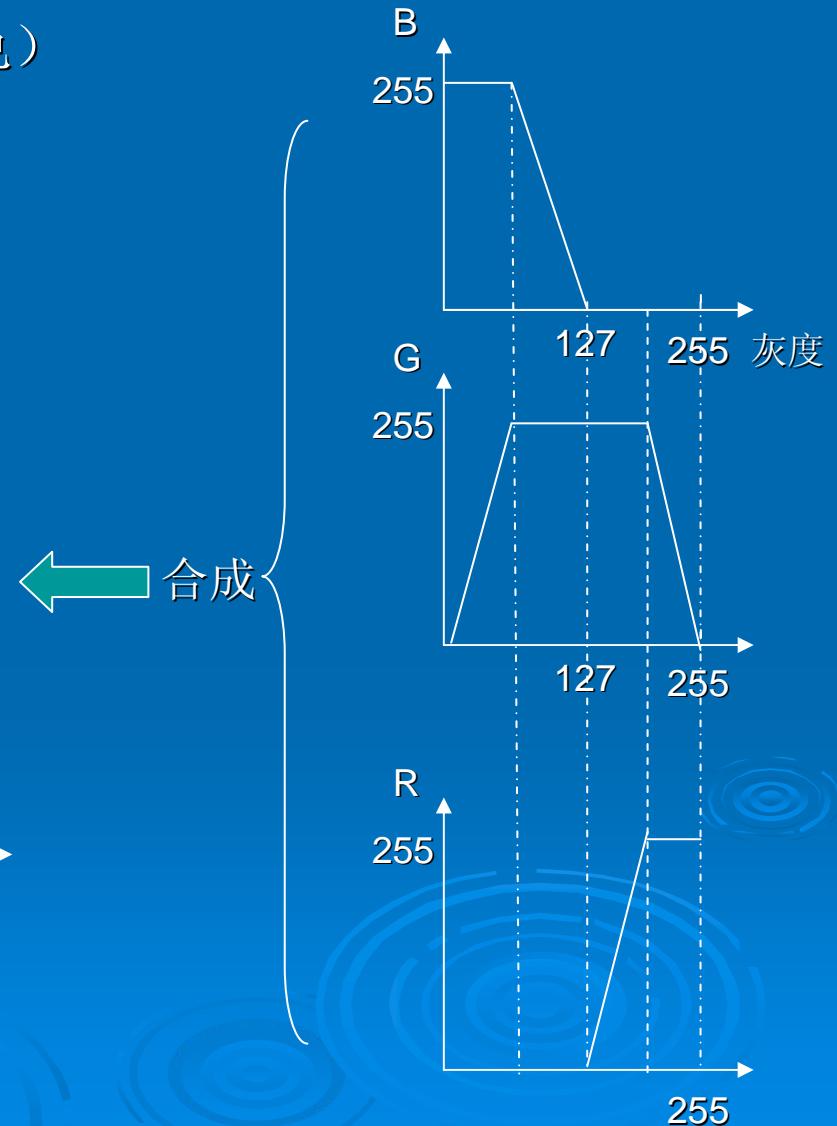
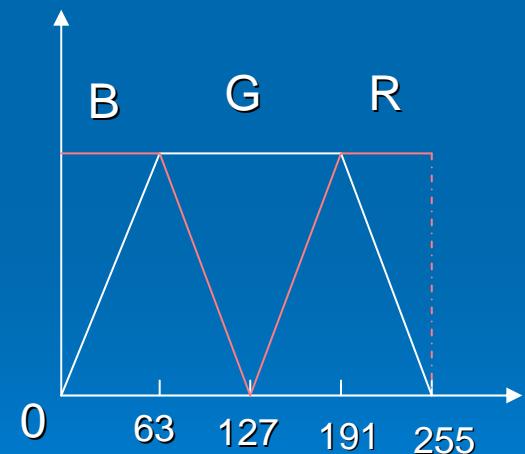
[人眼对彩色敏感, 可辨2000多种色, 灰度才几十级]

- 假彩色: 用遥感器中三波段合成R、G、B。
- 伪彩色: 单一波段, (灰度图——彩色)



[物理背景: 伪彩超, 红外乳腺诊断]

典型方法:



5) 图象的几何运算

两幅图象对应象素相+、-、*、/ 运算得到第三幅图象。F1、F2生成F3，都是点运算。

- $F3=A(F1+F2)+B$
- $F3=A(F1-F2)+B$ (减影技术，同一景物不同时间采集影像相减，去除相同，找出变化。——运动监测，目标跟踪。)
- $F3=A(F1 \times F2)+B$ (遥感：火灾、水灾、海岸耕地变化。)
- $F3=A(F1/F2)+B$ (医学：减影、血管、监测肾动脉是否阻塞。)

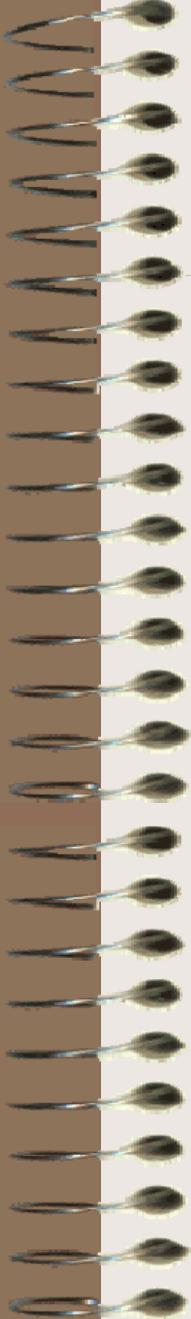
A、B是常数

- (1) 同一波不能区分两类物质（灰度相差不大）但两波相除后，差值明显增大
- (2) 消除山影、阴面影响，同一地物阴面、阳面灰度值不相同，二波相除后，阴面、灰度此值应相同。
- (3) 找新物质、矿产（地学工作者之事）

作业

已知直方图如下，试求均衡后直方图：

灰度	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
百分比	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16
均衡后	3	7	11	7	9	10	11	12	13	14	15	16				



4.4 濾波器:

1) 方法分类:

主要介绍灰度图像，彩色图是三个灰度图，图像记录亮度的幅度信息，而未突出相应信息，人识别主要是灰度突变部分，这部分信息包含在频谱信息中。

滤波目的便于识别，人工或后继处理。

图象不清晰、不突出是多种因素造成的：采集条件中未突出所需部分，有干扰（噪音、散斑、运动模糊等等）。

两种概念：恢复与增强

恢复：准确恢复原图

$$B = H A + N$$

A: 原图, B: 现图; N: 干扰, H: 线性变换。

当知H、N可恢复, 问题在H、N如何求。

增强：突出所关心的有用信息，抑制次要部分，去干扰，增强对比度。

二者有重叠部分：

增强带有恢复性质——突出有用信息上，且是局部性恢复。

增强二层含义：

锐化：突出轮廓——人眼对轮廓（对比度大部分）敏感

平滑：去噪音

滤波处理方法：

空域：取局部邻域 $(2M+1) \times (2M+1)$ 邻域的加权和——局域处理

$$g(x, y) = \sum_{i=-M}^{M} \sum_{j=-M}^{M} h(i, j) f(x+i, y+j) = h * f$$

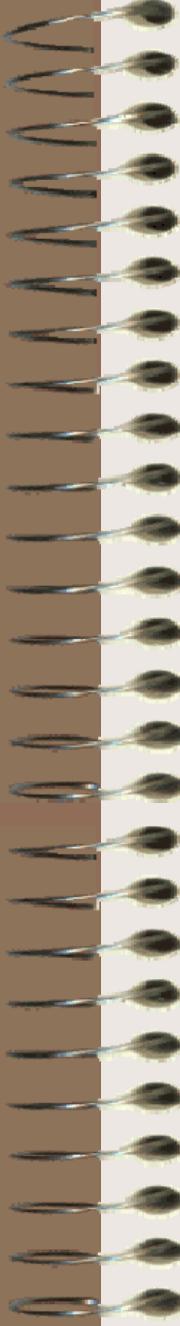
频域： $G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$

其中： $F(u, v)$ ：原始图象Fourier频谱

$G(u, v)$ ：平滑后图象的Fourier频谱

$H(u, v)$ ：滤波器转移函数（即频谱）

$H(u, v)$ 函数的定义，方法很多，没有唯一通用办法，针对具体情况选用不同方法。



2) 空域滤波:

① 锐化:

[图像传输变换（未聚焦好）、受到各种干扰而退化，典型的是图像模糊，而图像的判读和识别中，常需突出目标的轮廓或边缘信息。]

从数学上看，图像的模糊相当于图像被平均或积分，为实现图象的锐化，必需用它的反运算“微分”——加强高频分量作用，使轮廓清晰。]

[照片模糊两种理解]

- 1、平均或积分效应引起——用微分处理；
- 2、模糊可看作图像上高频分量被削弱——高频增强，引入微分：

$$D = \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \rightarrow \text{线性算子}$$

[注意：噪音亦属高频分量，往往随高频增强而突出。因此往往需要去噪后再锐化—微分]

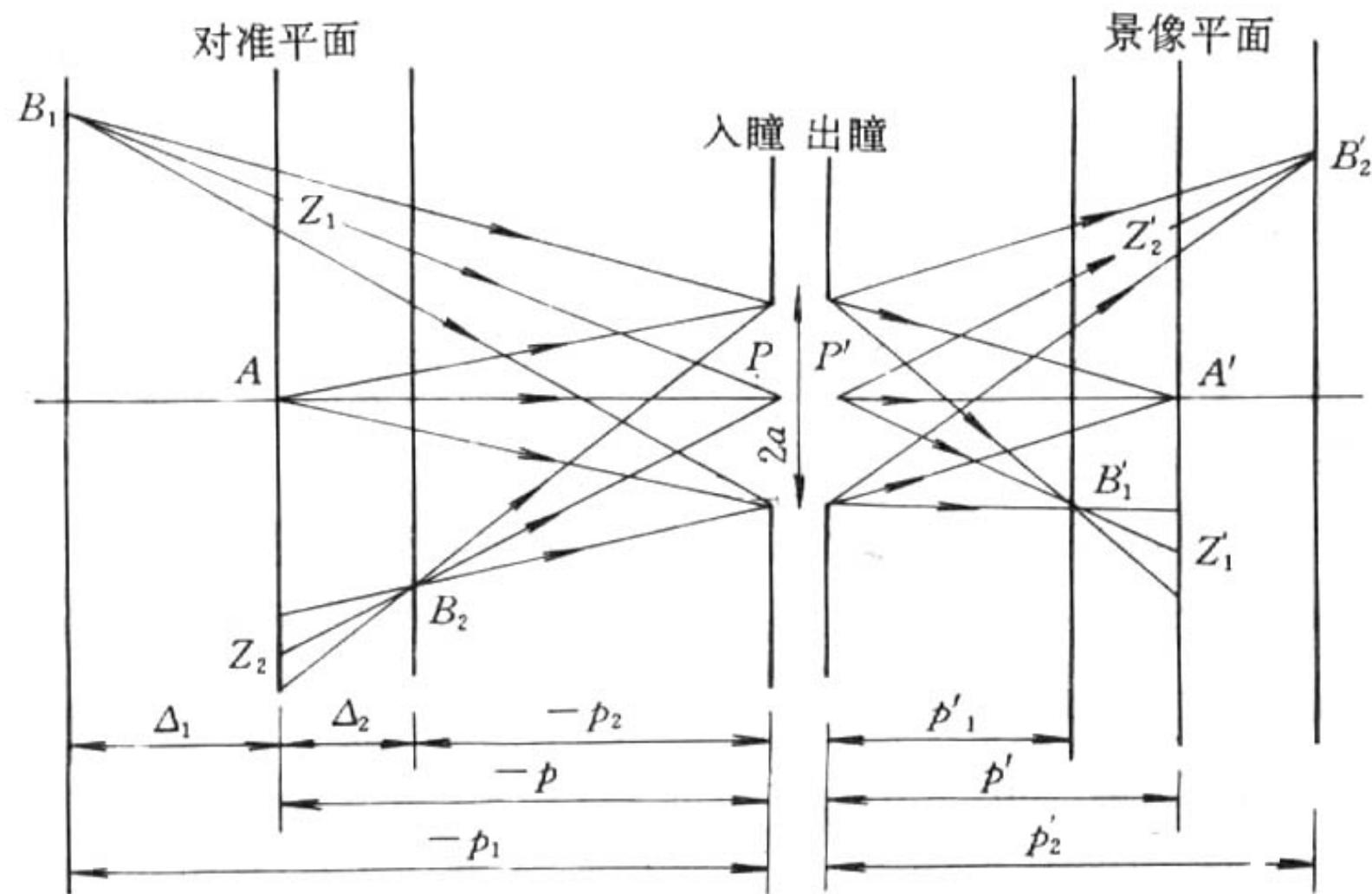


图 8-34 光学系统的景深

下面讨论一下微分算子：

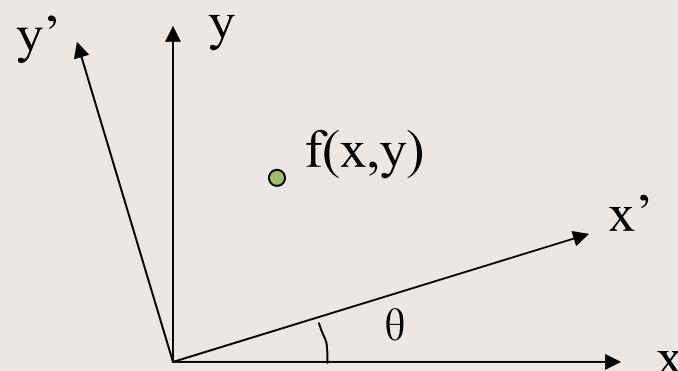
一般情况：

$$\frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow \text{一阶导数各向不同性}$$

希望求微分算子是各向同性的，即其微分效果不随特征方向不同而不同。

可证明：偏导数的平方和是各项同性的，梯度运算Laplacian运算都符合上述条件。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)^2 \quad \text{即各向同性}$$



证明: $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x} (-\sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta$$

可得上面关系, 证毕。

离散域上微分改成差分

$$\Delta_x f(i,j) = f(i,j) - f(i-1,j)$$

$$\Delta_y f(i,j) = f(i,j) - f(i,j-1)$$

$$\text{二阶: } \Delta x^2 f(i,j) = \Delta_x f(i+1,j) - \Delta_x f(i,j)$$

$$= f(i+1,j) + f(i-1,j) - 2f(i,j)$$

$$\Delta y^2 f(i,j) = f(i,j+1) + f(i,j-1) - 2f(i,j)$$

a. laplace算子

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(i,j) &= \Delta_x^2 f(i,j) + \Delta_y^2 f(i,j) \\ &= f(i+1,j) + f(i-1,j) \\ &\quad + f(i,j+1) + f(i,j-1) - 4f(i,j)\end{aligned}$$

	1	
1	-4	1
	1	

b. Roberts算子

$$g(i,j) = \sqrt{[f(i,j) - f(i+1,j+1)]^2 + [f(i+1,j) - f(i,j+1)]^2}$$

近似式：

$$|f(i,j) - f(i+1,j+1)| + |f(i+1,j) - f(i,j+1)|$$

(i,j)	(i+1,j)
(i,j+1)	(i+1,j+1)

c. Sobel算子

$$S = S_x^2 + S_y^2$$

$$S_x = a_2 + 2a_3 + a_4 - (a_0 + 2a_7 + a_6)$$

$$S_y = a_6 + 2a_5 + a_4 - (a_0 + 2a_1 + a_2)$$

0	1	2
7	(i,j)	3
6	5	4

d. Kirsch 算子

$$G(i, j) = \max_{k=0}^7 (5S_k - 3T_k)$$

对应最大 $G(i, j)$ 的 k

$$S_k = A_k + A_{k+1} + A_{k+2}$$

$$T_k = A_{k+3} + A_{k+4} + A_{k+5} + A_{k+6} + A_{k+7}$$

下标对 8 取模

5	5	5
3	(i,j)	3
3	3	3

$k = 0$

3	5	5
3	(i,j)	5
3	3	3

$k = 1$

e. 反锐化掩模法:

$$g(x, y) = f(x, y) - c[f(x, y) - \bar{f}(x, y)]$$

\bar{f} : 经平滑后的图象(模糊)

f : (原图)

[光学操作将聚焦的正像与散焦的负象在底版上叠加, 散焦的负象相当于一个模糊掩模。]

f. 定向滤波:

沿特定方向增强, 有朔像效果

-1	-c	-1
1	c	1

-1		1
-c		c
-1		1

c	1	
1		-1
	-1	-c

	1	c
-1		1
-c	-1	

g. Canny算子

1986年，Canny为一个边缘检测算子定义了目标集，并用优化的方法实现了边缘的检测。根据Canny的说法，一个边缘算子必须满足三个准则。

1) 低错误率：边缘算子应该只对边缘响应，并能找到所有的边，而对于非边缘应

能舍弃。

2) 定位精度：被边缘算子找到的边缘像素与真正的边缘像素间的距离应尽可能的

小。

3) 单边响应：在单边存在的地方，检测结果不应出现多边。

在Canny的假设下，对于一个带有Gaussian白噪声的阶跃边缘，边缘检测算子是一个与图像函数进行卷积的滤波器 f ，这个卷积滤波器应该平滑掉白噪声并找到边缘位置。

②平滑：

去噪声，改善图象质量，平滑降低了干扰，同时图象也模糊了。

$$g(x,y) = f(x,y) + n(x,y)$$

其中： $n(x,y)$: 噪声，均值为0

$f(x,y)$: 未被噪声干扰图

$g(x,y)$: 现图

a. 若用N幅同一图象（不同时刻拍摄的同一张图）， $f_1 f_2 \dots f_N$ 对应点逐点灰度取平均，即：

$$f(x,y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n f_i(x,y) = f(x,y) + \frac{\sum_{i=1}^n n(x,y)}{N} \quad \text{误差减小}$$

其结果不损失原图象信息，且信噪功率比提高了N倍。

$$P(x,y) = f^2(x,y) / E \{ n^2(x,y) \}$$

证明：

噪音：
$$\begin{cases} E[n(x, y)] = 0 \\ E\{n_i(x, y) + n_j(x, y)\} = E\{n_i\} + E\{n_j\} \\ E\{n_i(x, y) \cdot n_j(x, y)\} = E\{n_i\} \cdot E\{n_j\} \quad i \neq j \end{cases}$$

M 幅图平均：

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, y) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [f_i(x, y) + n_i(x, y)] \\ &= f(x, y) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M n_i(x, y) \quad \text{误差减少} \end{aligned}$$

$$\bar{p}(x, y) = \frac{f^2(x, y)}{E\left\{\left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M n_i(x, y)\right]^2\right\}}$$

$$\begin{aligned}
 &= M^2 f^2(x, y) \diagup \\
 &\quad E \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M n_i(x, y) n_j(x, y) \right] \\
 &= M^2 f^2(x, y) \diagup \\
 &\quad \left\{ E \left[\sum_{i=1}^M n_i^2(x, y) \right] + E \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M n_i(x, y) n_j(x, y) \right] \right\} \\
 &= M^2 f^2(x, y) \diagup \\
 &\quad \left\{ E \left[\sum_{i=1}^M n_i^2(x, y) \right] + \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M E[n_i(x, y)] \cdot E[n_j(x, y)] \right\} \\
 &= M^2 f^2(x, y) \diagup \\
 &\quad M E[n_i^2(x, y)] \\
 &= M P(x, y)
 \end{aligned}$$

可见信噪功率比加大了 M 倍

b. 若对单幅图象，取其 $M \times M$ 窗口平均值来代替 (i, j) 点值，一般取 3×3 , 5×5 窗口。

[这时认为噪音比关心的细节更小，因此平均后，不损失信息而去除了噪音]

$$g(x, y) = \sum_i \sum_j h(i, j) f(x + i, y + j)$$

评价：邻域平均，平滑效果不好，减少噪音的同时，损失了高频信息。

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

[目前：已提出了许多保边缘细节的局部平滑法，出发点都集中在如何选择邻域的大小、形状和方向。如何选择参加平均的点数以及邻域各点的权重系数等。]

典型方法之一，最大均匀性平滑；

[从可能的子邻域选取平均值与该点最接近的邻域平滑]

10	12	100
14	11	89
12	8	88

3) 频域滤波:

图上均匀与不均匀反映了频率高低不同

压制低频 (增强高频) — 锐化

压制高频 (增强低频) — 平滑

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y)$$

$$G(u,v) = H(u,v) \cdot F(u,v)$$

滤波传递函数

(1) 低通滤波

a. 理想低通滤波器

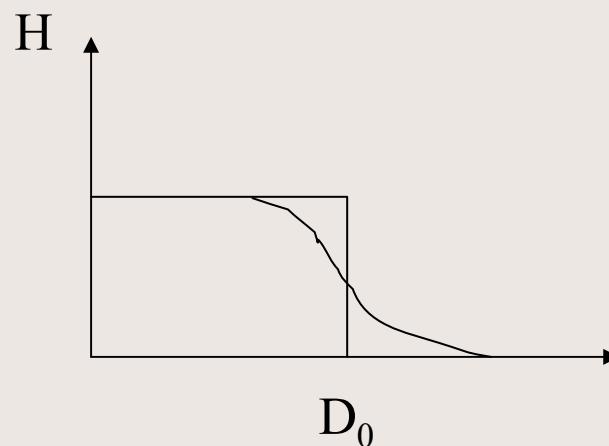
$$H(u,v) = 1 \quad \text{当 } D(u,v) \leq D_0$$

$$0 \quad \text{当 } D(u,v) > D_0$$

其中: $D(u,v) = \sqrt{u^2 + v^2}$

点(u,v)到频率平面原点的距离

负效: 图象模糊, 出现振铃效果



b. 巴特沃斯 (Butterworth)

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + 0.414 \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$

D_0 : 截止频率 n : 阶数, 控制曲线形状

c. 指数滤波器 (无振铃)

$$H(u, v) = e^{-0.347 \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^n}$$

d. 梯形滤波器 (性能介于理想低通滤波器与完全平滑滤波器之间)

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & D(u, v) < D_0 \\ \frac{D(u, v) - D_1}{D_0 - D_1} & D_0 \leq D(u, v) \leq D_1 \\ 0 & D(u, v) > D_1 \end{cases}$$

性能介于理想低通滤波器与完全平滑滤波器之间

(2)高通濾波

a. 理想

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{当 } D(u,v) < D_0 \\ 1 & \text{当 } D(u,v) \geq D_0 \end{cases}$$

d. 巴特沃斯

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + 0.414 \left[\frac{D_0}{D(u,v)} \right]^{2n}}$$

D_0 : 截止频率, n : 阶数, 控制曲线形状

e. 指数

$$H(u,v) = e^{-0.347 \left[\frac{D_0}{D(u,v)} \right]^n}$$

b. 梯形

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & D(u,v) > D_0 \\ \frac{D(u,v) - D_1}{D_0 - D_1} & D_1 \leq D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & D(u,v) < D_1 \end{cases}$$

其中: $D_1 \leq D(u,v) \leq D_0$

4) 特殊滤波器

(1) 同态滤波: (Homomorphic Image Filter)

成像物理背景: 到图象的密度域处理 (即对数亮度域), 因为人眼对图象亮度响应具有类似于对数运算的非线性形式。

[同态图象增强是在密度域中应用成功的一种增强技术]

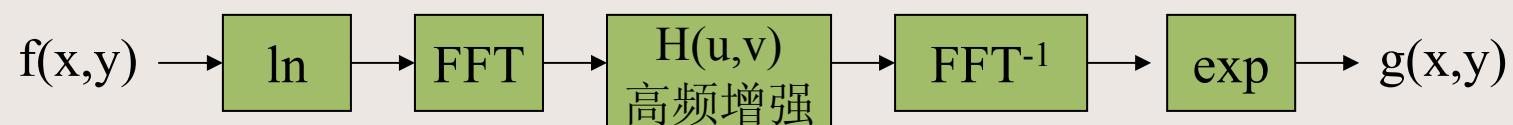
$$f(x, y) = I(x, y) \cdot R(x, y)$$

其中: $I(x, y)$: 照射分量 (低频)

$R(x, y)$: 反射分量 (高频) [图象细节的不同在空间作快速变化]

分析: 关心反射信息, 但室内外 I 强度不同, 图片明暗不均, 能否消除照度不均, 而增强反射部分比重。

过程:



$$f(x, y) = I(x, y) \cdot R(x, y)$$

$$z(x, y) = \ln [f(x, y)] = \ln [I(x, y)] + \ln [R(x, y)]$$

$$F[z(x, y)] = F[\ln I(x, y)] + F[\ln R(x, y)]$$

$$Z(u, v) = I(u, v) + R(u, v)$$

$$S(u, v) = H(u, v) \cdot Z(u, v)$$

$$s(x, y) = F^{-1}[S(u, v)] = i(x, y) + r(x, y)$$

$$g(x, y) = \exp [s(x, y)]$$

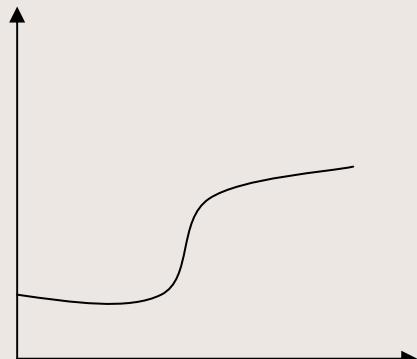
$$= \exp [i(x, y) + r(x, y)]$$

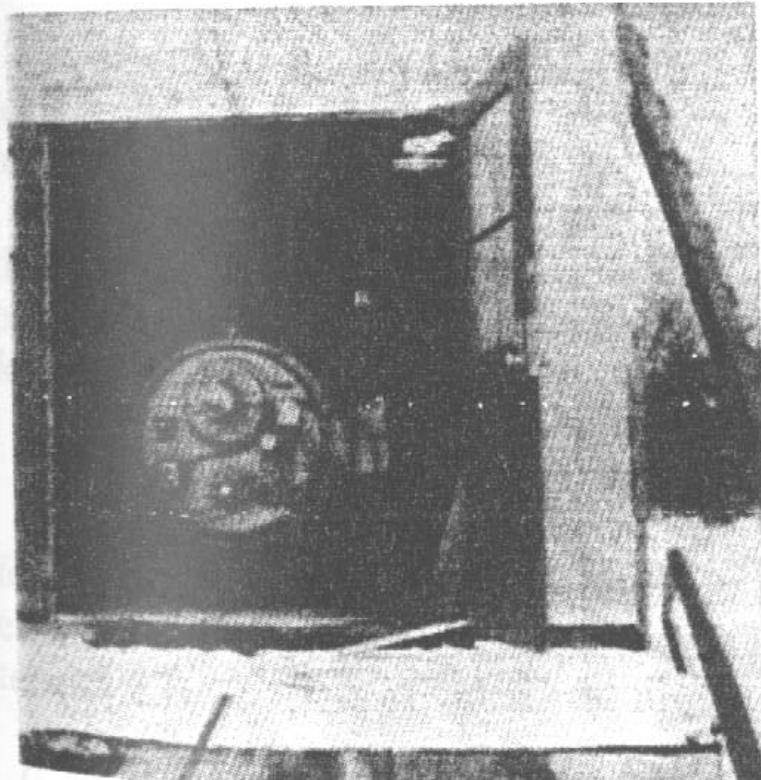
$$= i_0(x, y) \cdot r_0(x, y)$$

参见浙大书 P184

$$H(u, v)$$

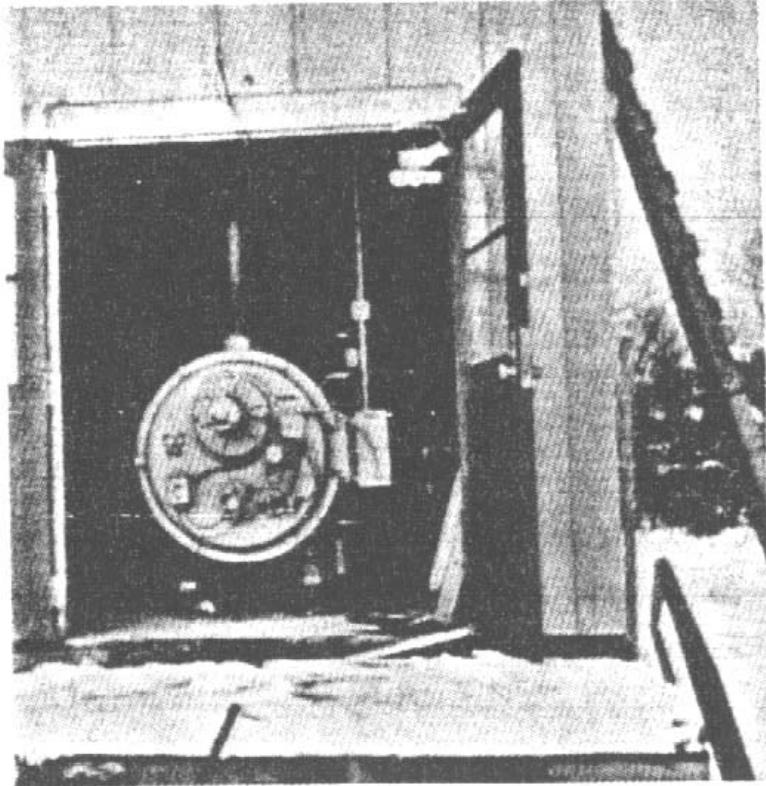
高通





(a)

同态滤波处理前



(b)

同态滤波处理后

(2)中值滤波:

[去除特殊干扰点的有效方法之一,认为原图象是连续的,干扰点破坏连续性]

方法: 中值滤波即取某一窗口中各点值排序, 并取其中位数之值为该点的值。

一般窗口选: $3 \times 3, 5 \times 5,$



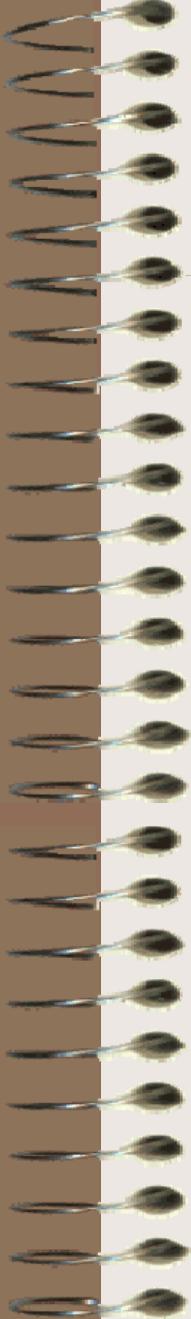
窗口大小、形状可根据研究需要各式各样, 中值滤波是一种非线性滤波。

例: 0 0 0 6 0 0 1 2 1 0 1 2 1 0 2 4 2 0 2 4 2

3点平均: 0 2 2 2 1/3 1 4/3 1 2/3 1 4/3 1 1 2 8/3 2 4/3 2 8/3

3点排序 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2

取中值



问题:

排序费时, n^2 量级

快速算法:

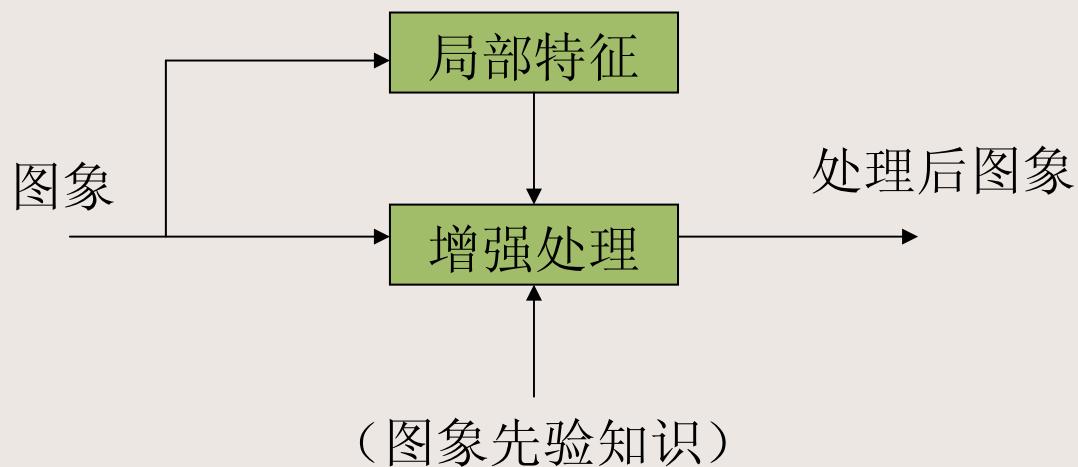
1、图象用 $n \times n$ 滑动窗口滤波时, 每次只考虑最左或最右列元素, 其它可不考虑, 缩小计算量。

2、准中值 (邻近法) : 先找到列中值, 再求各列中值之中值。

(3) 自适应滤波(Adaptive Filtering)

加入先知识与图象局部特征信息。

典型的自适应图象增强系统：



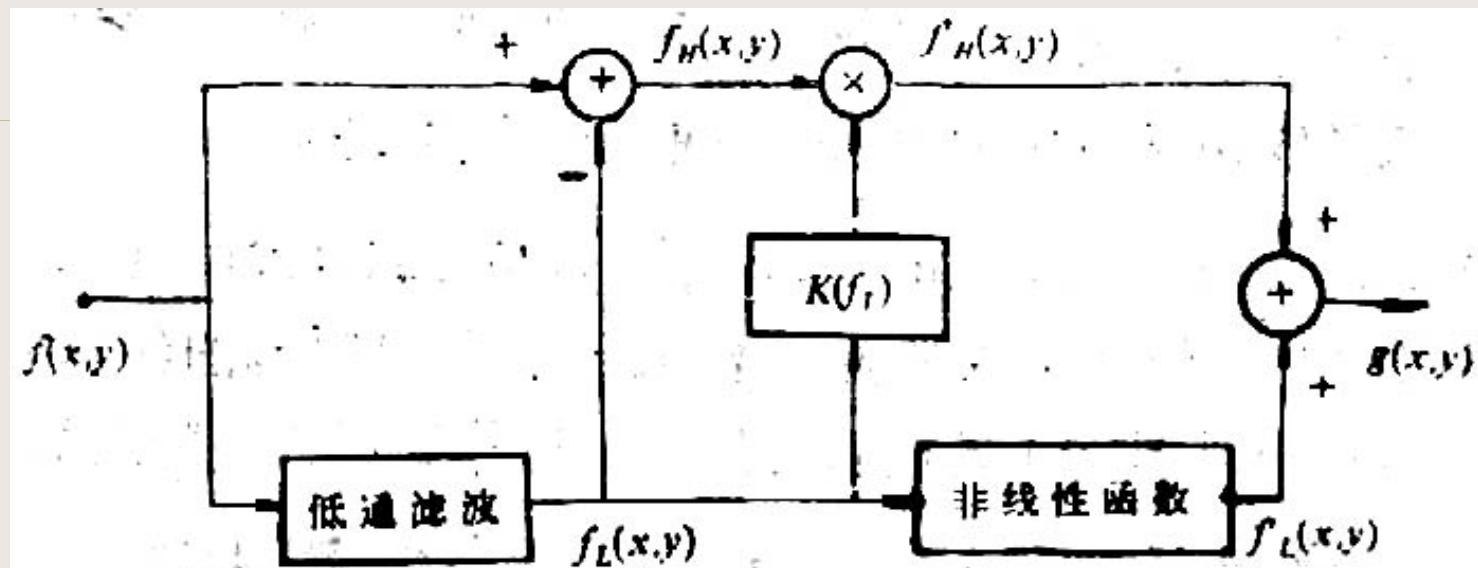


图5-27 用于云层复盖图像的自适应图像增强系统

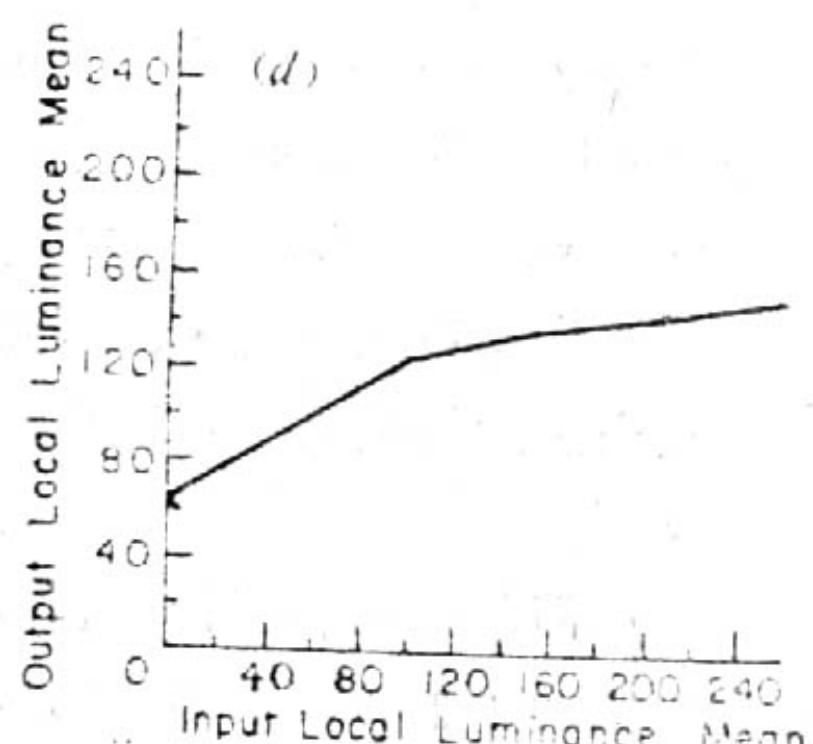
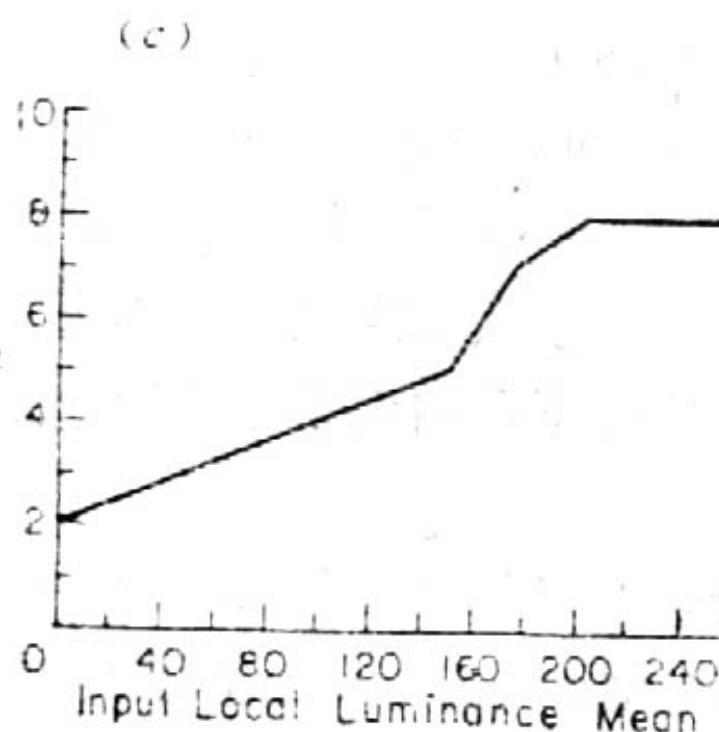
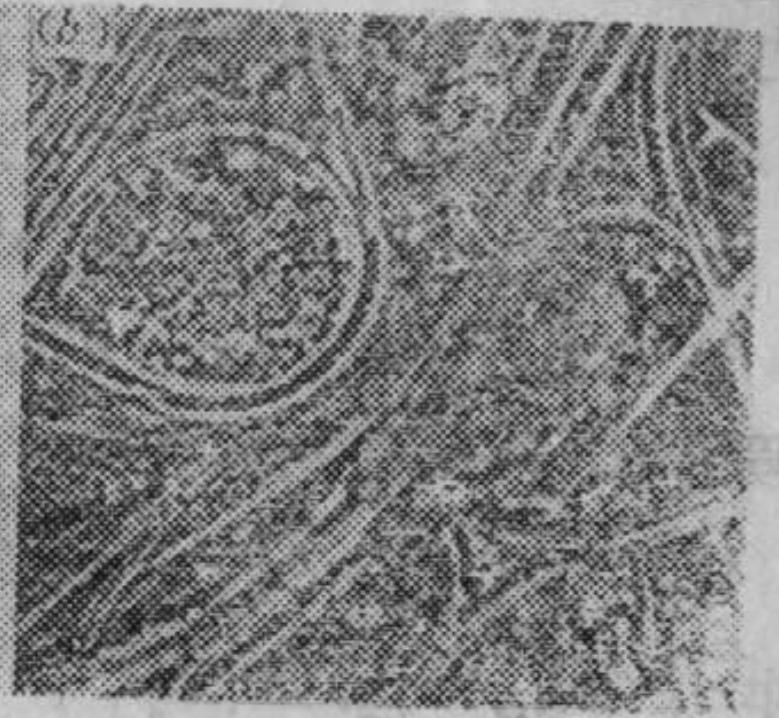
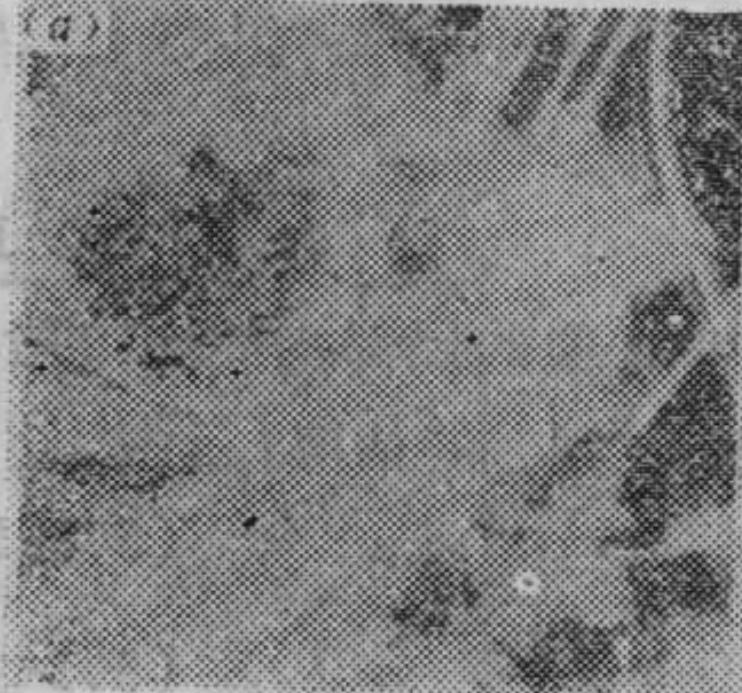
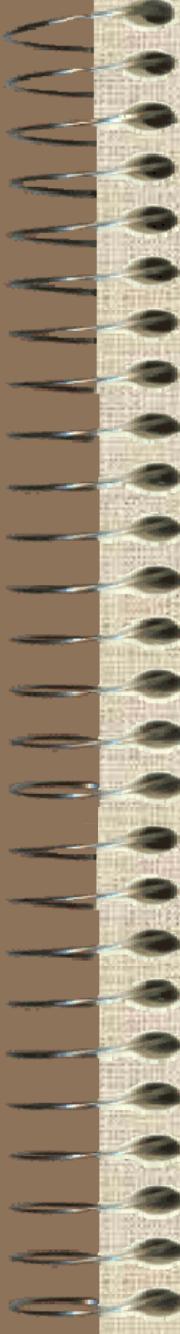


图5-28 云层覆盖的退化图像的增强



自适应滤波处理前

自适应滤波处理后



第五章 图像恢复

图像恢复也是一种改善图像质量的处理技术，实际成像过程中，由于种种原因，会使原来清晰图像变成模糊图像（或称降质图像）。

如：宇航卫星、航空测绘、遥感、天文学中的图片，由于大气湍流及摄像机与物体之间的相对运动都会使图象降质；X线成像系统由于X射线散布会使医学上所得的射线照片的分辨率和对比度下降；电子透镜的球面象差往往降低电子显微照片的质量；运动图像由于曝光时间长，产生模糊，或者由于光圈太大或太小等原因。

图象恢复：将降质了的图象恢复成原来的图象，针对引起图象退化原因，以及降质过程某些先验知识，建立退化模型，再针对降质过程采取方法，恢复图象。

一般地讲，复原的好坏应有一个规定的客观标准，以能对复原的结果作出某种最佳的估计。

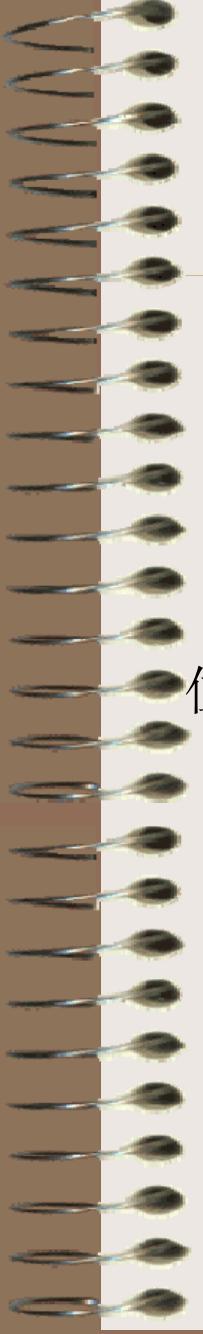
5.1 退化模型

降质过程可看作对原图象 $f(x, y)$ 作线性运算。

$$g(x, y) = H \cdot f(x, y)$$

↓

降质后 降质模型 原图（清晰）



以后讨论中对降质模型H作以下假设:

① H是线性的

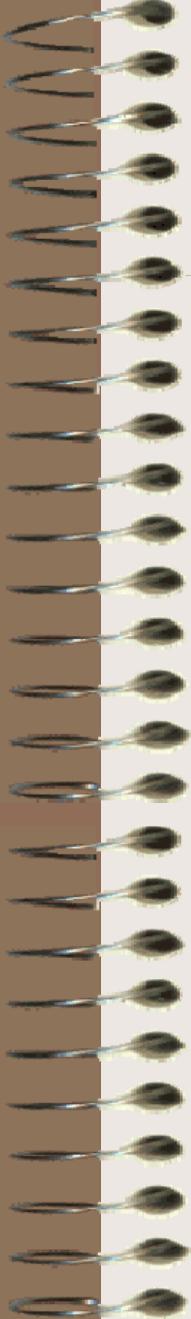
$$H [k_1 f_1(x, y) + k_2 f_2(x, y)] = k_1 H f_1(x, y) + k_2 H f_2(x, y)$$

② H是空间（或移位）不变的

对任一个 $f(x, y)$ 和任一个常数 α 和 β 都有:

$$H f(x - \alpha, y - \beta) = g(x - \alpha, y - \beta)$$

就是说图象上任一点的运算结果只取决于该点的输入值，而与坐标位置无关。


$$g(x, y) = H \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

(根据冲击响应定义)

$$(H \text{ 为一线性算子}) \rightarrow= \int_{-\infty}^{\infty} \int H [f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta$$

$$(H \text{ 是空间移不变 }) \rightarrow= \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\alpha, \beta) \cdot H \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

$$h(x - \alpha, y - \beta) = H \delta(x - \alpha, y - \beta)$$

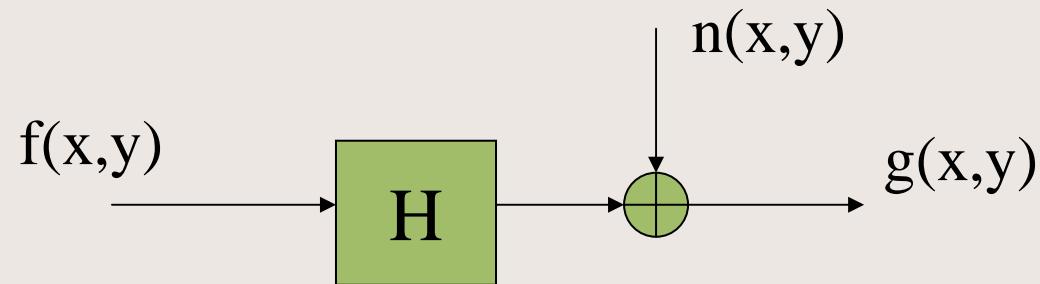
系统H的冲激响应，在光学中冲激为一个光点，h一般也被称为点扩展函数，PSF
(Point Spread Function)

退化可以理解为系统冲激响应不理想造成图象的降质。

而在实际降质过程中，降质的另一个复杂因素是随机噪声，考虑有噪声的图象恢复，必须知道噪声统计特性以及噪声和图像信号的相关情况，这是非常复杂的。

实际中假设是白噪声——频谱密度为常数，且与图像不相关，（一般只要噪声带宽比图象带宽大得多时，此假设成立的），由此得出图象退化模型。

$$g(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + n(x, y)$$



图象降质过程模型

讨论的前提是假设H线性，下面一些恢复方法都是对上述模型的近似估计。

两边进行付氏变换：

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

讨论恢复问题：

若略去噪音N，得：

$$F = \frac{G}{H}$$

反变换，可求 $F \rightarrow f$

若H有零点，G也有零点出现，0/0的不定值，这样模型不保证所有逆过程都有解？

由于引起退化的因素众多，而且性质不同，而目前又没有统一的恢复方法，许多人根据不同的物理模型，采用不同的退化模型、处理技巧和估计准则，从而导出了多种恢复方法。

有效方法：针对特定条件，用特定模型处理。

5.2 退化参数的确定

即确定: $h(x,y)$ 与 $n(x,y)$

先验知识办法——与图像无关

后验办法——与图象有关, 经验性的

1. 根据导致模糊的物理过程 (先验知识)

① 大气湍流造成的传递函数

$$H(u, v) = \exp \left[-c(u^2 + v^2)^{5/6} \right] \quad (c \text{ 与湍流性质有关的常数})$$

② 光学系统散焦传递函数

$$H(u, v) = \frac{J_1(\pi d \rho)}{\pi d \rho}$$

这里: $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$

d : 光学系统散焦点扩散函数的直径。

$J_1(\cdot)$ \rightarrow 第一类一阶贝塞尔函数

$$J_1(Z) = \frac{Z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k Z^{2k}}{2^{2k} \cdot k! (k+1)}$$

$|\arg Z| < \pi$

③ 相机与景物之间相对运动造成图像降质, $H(u,v)$ ——运动模糊:

已知: 设相机不动, 对象运动, 运动分量 x, y 分别为 $x_0(t), y_0(t)$
相机快门速度是理想的, 快门开启时间 (曝光) T 。

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

$$\text{求变换: } G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt \cdot \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

$$= \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int f[x - x_0(t), y - y_0(t)] \cdot \exp[-j2\pi(u(x - x_0(t), v(y - y_0(t))))] \cdot \exp[-j2\pi(u, x_0(t)) + v(y_0(t))] dx dy \right\} dt$$

(按线性位移不变性质

$$= \int_0^T F(u, v) \cdot \exp[-j2\pi(ux_0(t)) + vy_0(t)] dt$$

$$= F(u, v) \int_0^T \exp[-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))] dt$$

$$= F(u, v) \cdot H(u, v)$$

$$\text{得到: } H(u, v) = \int_0^T \exp[-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))] dt$$

2. 根据后验知识判断：

图象的各元件：线 | 、边 \sqsubset 、点

当不知退化过程或过程复杂时，只能用退化图象本身来估计：
 $h(x, y)$ 。

例如：1 天文上一个星的退化图像——模糊图象即为该点图象的点扩展函数。

2 利用线退化图象来确定 $h(x, y)$ 。

1) 根据线退化提取 $h(x, y)$

理想线 $\delta(y)$ ，退化为 $h_\ell(y)$ 。

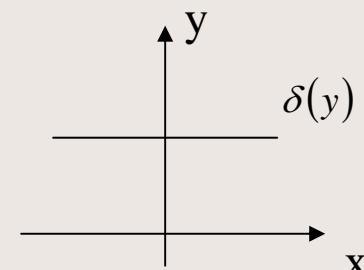
$$h_\ell(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \alpha, y) d\alpha$$

用 $x = x - \alpha$

$$h_\ell(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx$$

空域：1、线扩展函数在 y 方向分布与 x 无关，
在任何一条平行 x 之线上 $h_\ell(y)$ 为常量。
2、 $h_\ell(y)$ 在 y 方向上任一点的数值是
点扩展函数在该点沿 x 方向的积分。



付氏变换: $H_\ell(v) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\ell(y) \exp[-j2\pi vy] dy$

而: $H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int h(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$

当 $u = 0$ 时: $H(0, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int h(x, y) \exp[-j2\pi vy] dx dy$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx \right] \cdot \exp[-j2\pi vy] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_\ell(y) \cdot \exp[-j2\pi vy] dy \end{aligned}$$

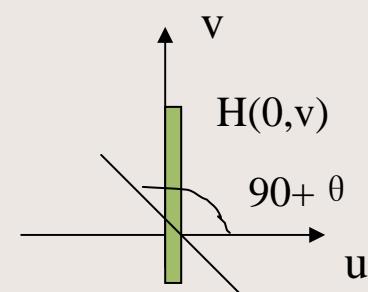
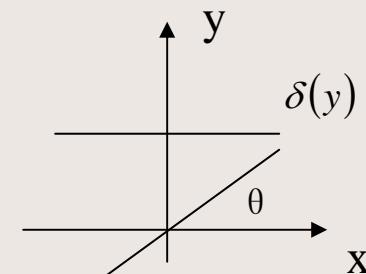
所以: $H_\ell(v) = H(0, v)$

$H(0, v)$ 为沿频谱平面上沿 $u = 0$ 直线所取之值。

可见由线的退化模型, 可找出 $H(u, v)$ 中的一条线。

一般: 若原线有角度 θ , 则在 $u - v$ 面上有 $90^\circ + \theta$, 可推广之。

[各个剖面都求出, 就可以恢复出 $H(u, v)$ 面]



2) 根据图象上边提取 $h(x,y)$

(图象上线不多, 但边很多, 把边求导后变成线)

边可看成阶跃:

$$s(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial s(y)}{\partial y} = \delta(y) \quad \text{一线}$$

结论: 若原图上有阶跃, 则可证该边界线的退化图象的导数等于平行于该边界线的线的退化图象。

边的退化图象 $h_s(y)$

$$\begin{aligned} h_s(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int h(x - \alpha, y - \beta) s(\beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int h(\alpha, \beta) \cdot s(y - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h_s(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} \int h(\alpha, \beta) \frac{\partial s(y - \beta)}{\partial y} d\alpha d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int h(\alpha, \beta) \delta(y - \beta) d\alpha d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha, y) \cdot d\alpha = h_{\ell}(y)$$

(可见, 可用边界线退化图象的导数来找线的扩展函数)

$$\begin{aligned} h_{\ell}(y) &= \frac{\partial h_s(y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} H_s(v) \exp[j2\pi v y] dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_s(v) \frac{\partial}{\partial y} [\exp(j2\pi v y)] dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_s(v) (j2\pi v) \exp[j2\pi v y] dv \end{aligned}$$

$$\text{而由前面: } h_{\ell}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\ell}(v) \exp[j2\pi v y] dv$$

$$\text{故可得: } H_{\ell}(v) = j2\pi v \cdot H_s(v) = H(0, v)$$



3) 噪声的确定: $n(x,y)$

分为与图象相关、与图象不相关两类。

还需了解噪声统计性质及其与图象的相关性质。

一般假设:

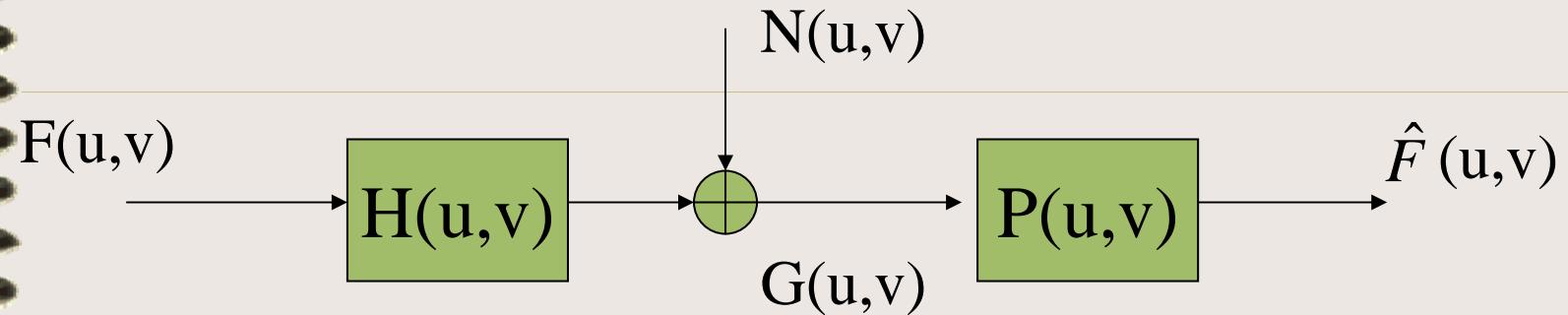
a. 白色噪声, 与图象无关。指图象上各点噪声不相关, 其频谱密度为常数。只要噪声带宽远大于图象带宽即可作白噪声处理。

从退化图象大块平坦区中估计之, 一般不具备噪声先验知识。不同方法要不同特征参数——方差, 频谱。

b. 乘性噪声:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) + \alpha(x, y)f(x, y) \\ &= f(x, y)[1 + \alpha(x, y)] = f(x, y) \cdot n(x, y) \end{aligned}$$

5.3 恢复图像的滤波法

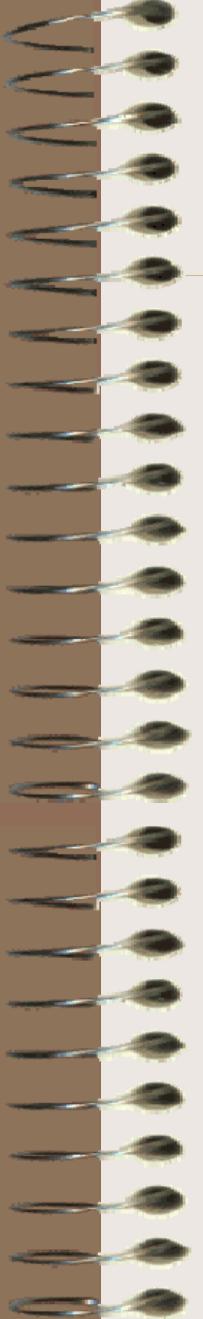


1、逆滤波：

若暂不考虑噪声：

$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

$$F(u,v) = \frac{G(u,v)}{H(u,v)}$$


$$\begin{aligned}\text{当有噪声时: } \hat{F}(u, v) &= \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = \frac{F(u, v) \cdot H(u, v) + N(u, v)}{H(u, v)} \\ &= F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}\end{aligned}$$

当 $H = 0$ 时, N/H 很大, \hat{F} 估值无意义。

为此改进为:

$$\hat{F}(u, v) = G(u, v) \cdot P(u, v)$$

$$P(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & \sqrt{u^2 + v^2} \leq D_0 \\ 0 & \sqrt{u^2 + v^2} > D_0 \end{cases}$$

D_0 为截止频率选在 $H(u, v)$ 通带内某一适当位置, 使恢复图象有较大的信噪比。

(截止频率 D_0 很难定, 实际上不太实用, 往往加给定条件, 这样就引出下面的恢复方法)

2、等功率谱滤波

使恢复图象 $\hat{f}(x, y)$ 的功率谱与原图 $f(x, y)$ 的功率谱相等。

交待一下：

$$\text{自相关: } R_{ff} = f(t) * f(-t) = \int f(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \text{功率谱: } S_{ff} &= F[R_{ff}(\tau)] = F[f(t) * f(-t)] = F(s) \cdot F(-s) \\ &= F(s) \cdot F^*(s) = |F(s)|^2 \end{aligned}$$

(由信息论知, 随机向量的自相关函数的付氏变换是随机向量的功率谱密度。)

等功率谱滤波函数简化的推导过程：

由线性系统理论，退化图象和原图象的功率谱 S_{gg} 和 S_{ff} 之间满足如下关系：

$$S_{gg}(u, v) = |H(u, v)|^2 \cdot S_{ff}(u, v)$$

$$\begin{aligned} S_{\hat{f}\hat{f}}(u, v) &= |H_p(u, v)|^2 S_{gg}(u, v) \\ &= |H_p(u, v)|^2 \cdot [|H(u, v)|^2 S_{ff}(u, v) + S_{nn}(u, v)] \end{aligned}$$

令： $S_{\hat{f}\hat{f}}(u, v) = S_{ff}(u, v)$

$$\text{可得: } H_p(u, v) = \left[\frac{1}{|H(u, v)|^2 + \frac{S_{nn}(u, v)}{S_{ff}(u, v)}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

讨论：（此结果比不加约束条件要好）

(1) 当无噪声时, $S_{nn}(u, v) = 0$ 即为逆滤波器

(2) 当 $H(u, v)$ 很小时 $\rightarrow 0$

$$H_P(u, v) = \left[\frac{S_{ff}(u, v)}{S_{nn}(u, v)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

可理解为有噪声时最佳滤波器

3、Wiener滤波

Wiener滤波恢复正是在假定图像信号可近似看作平稳随机过程的前提下，按照使原图象 $f(x,y)$ 与恢复后的图象 $\hat{f}(x,y)$ 之间的均方误差 e^2 达到最小的准则，来实现图象恢复的。即：

$$e^2 = \min E \left\{ [f(x,y) - \hat{f}(x,y)]^2 \right\}$$

Andrew和Hunt推导出满足这一要求的转移函数为：

$$H_w(u,v) = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + \frac{S_n(u,v)}{S_f(u,v)}}$$

5.4 其它约束条件下的恢复方法:

1. 约束最小平方恢复。
2. 最大后验恢复。

5.5 代数恢复方法:

在已知 g 、 H 、 n 某些知识情况下, 寻求估计 f 方法.

1. 无约束最小二乘方恢复

取图象噪声: $n=g-Hf$ 取 \hat{f} 作为 f 估计时, 使

$$J<\hat{f}> = \| g - H \hat{f} \|^2 \text{ 最小。}$$

利用上述最佳条件, 可得出最佳估值 \hat{f} , 令

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(f)}{\partial f} &= \frac{\partial}{\partial \hat{f}} (g - H\hat{f})^T (g - H\hat{f}) \\ &= -2H^T (g - H\hat{f}) \\ &= -2H^T g + 2H^T H\hat{f} = 0 \end{aligned}$$

于是: $\hat{f} = (H^T H)^{-1} H^T g$

如果x, y方向采样点数相同即 $M=N$, 并假设H是满秩(非奇异的), 则有:

$$\hat{f} = H^{-1} (H^T)^{-1} H^T g = H^{-1} g$$

若H已知, 那么便可由g求出f的最佳估值 \hat{f} 。

2. 有约束的最小二乘恢复

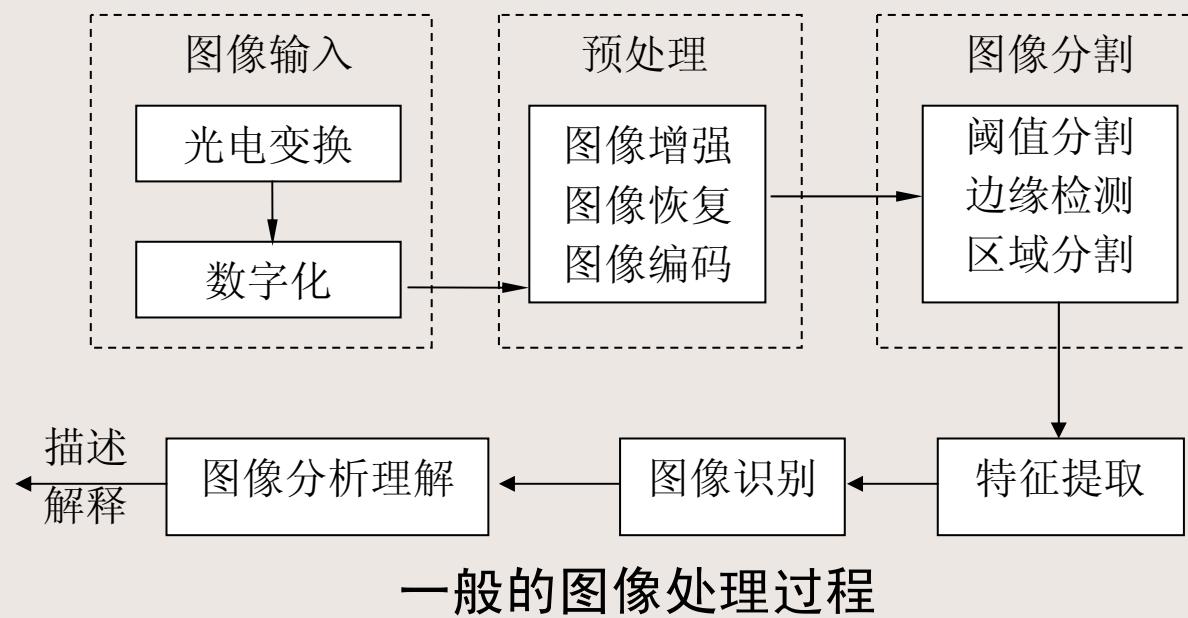
代数实现方法相当复杂, 由于恢复问题中存在病态性, 故导出有约束的最小二乘恢复(自学)

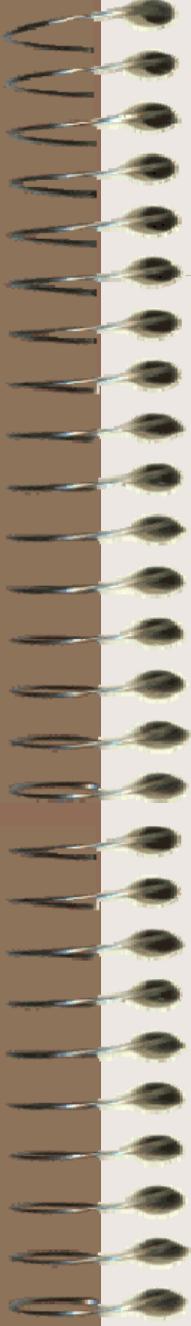
第六章 图象分割

6.1 概述

图象处理有两大类目的：

1. 改善象质（增强、恢复）
2. 图象分析：对图象内容作出描述





第六章 图象分割

6.1概述

图像分析：（也叫景物分析或图像理解）

可看作是一种描述过程，主要研究用自动或半自动装置和系统，从图像中提取有用测度，数据或信息生成非图的描述或表示。

图像分割：将图像中有意义的特征或需要应用的特征提取出来。

（简单而又难于实现的最基础的识别工作。由于目标特征不均匀，图像中有噪声——分割困难。图象几何性质与象素位置有关，与灰度值无关。往往以二值图像作为研究对象，对噪声的敏感性处理不好，将严重影响分析结果。）

人的视觉系统对图像分割是十分复杂的，也是相当有效的。但分割原理和模型都未搞清楚。

分割方法分类：

- ①人机交互——手工勾画，训练区办法。
- ②阈值法——（与对象有关）
- ③边缘检测法：边缘检测算子——已知算子
- ④生长法，贯序分割法，松弛法（Relaxation）
- ⑤其它 模板匹配——已知模板

最佳曲面拟合——已知函数

纹理检测

自动分割算法

6.2 阈值分割

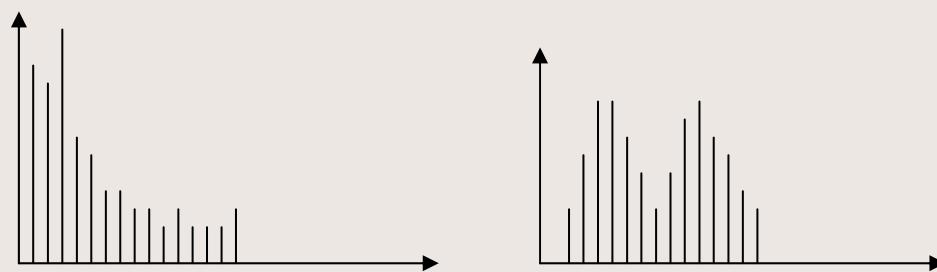
1 阈值分割原理

$$g(x, y) = \begin{cases} L_E & f(x, y) \geq T \\ L_B & f(x, y) < T \end{cases}$$

非理想情况，各段的分界不明显，

3种误差 a) 增加了新的区域，b) 失去了原有的区域，c) 区域分割
边界定位不正确

动态门限：把图像分成子图像，子图像做直方图，再定不同的门限



6.2 阈值分割

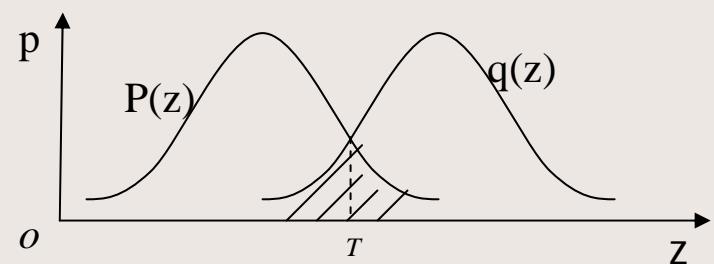
2 阈值的选取

★最小误差阈值选取法

假设图像中目标及背景的灰度为正态分布，其灰度分布概率密度函数分别 $p(z)$, $q(z)$. 设对象物占整体图像的比例为 t , 此时整体图像的灰度概率密度有下式决定

$$tp(z) + (1-t)q(z)$$

现在用阈值 T 分开：当 $z > T$ 时为背景，反之则是对象物。



目标和背景概率密度分布

6.2 阈值分割

把背景误认为对象物的概率: $Q(T) = \int_{-\infty}^{\theta} q(z)dz$

把对象物误认为背景的概率: $1 - P(T) = \int_{\theta}^{\infty} p(z)dz$

错误区分的概率: $t[1 - P(T)] + (1 - t)Q(T)$

求上式最小值时的 t , 便是阈值. 即对上式求微分

$$\frac{d}{dT} \{t[1 - P(T)] + (1 - t)Q(T)\} = 0 \rightarrow (1 - t)q(T) - tp(T) = 0$$

根据假设, 当 $t, p(z), q(z)$ 已知时, 可求解阈值 T .

该方法必须用两个已知正态分布的曲线合成来近似直方图的分布, 还要给定两个正态分布合成的比例 t , 实现起来比较复杂

6.2 阈值分割

2 阈值的选取

★最大方差阈值选取法

也叫大津阈值,把直方图在某一阈值处分割成两组, 当被分成的两组间方差为最大时, 决定阈值. 设一幅图像的灰度值为1~m级, 灰度值i的像素数为n_i, 则像素总数 $N = \sum_{i=1}^m n_i$ 各值的概率 $p_i = \frac{n_i}{N}$, 用T将其分成两组C₀={1~T}和C₁={T+1~m}, 各组产生的概率如下:

C₀和C₁产生的概率分别为 $w_0 = \sum_{i=1}^T p_i = w(T)$ 和 $w_1 = \sum_{i=T+1}^m p_i = 1 - w_0$

6.2 阈值分割

2 阈值的选取

★最大方差阈值选取法

C_0 和 C_1 的平均值分别为 $\mu_0 = \sum_{i=1}^T \frac{ip_i}{w_0} = \frac{\mu(T)}{w(T)}$ 和 $\mu_1 = \sum_{i=T+1}^m \frac{ip_i}{w_1} = \frac{\mu - \mu(T)}{1-w(T)}$

其中, $\mu = \sum_{i=1}^m ip_i = w_0\mu_0 + w_1\mu_1$ 是整体图像的灰度平均值,

$\mu(T) = \sum_{i=1}^T ip_i$ 是阈值为 T 时灰度平均值

两组间的方差用下式求出

$$\delta^2(T) = w_0(\mu_0 - \mu)^2 + w_1(\mu_1 - \mu)^2 = w_0w_1(\mu_1 - \mu_0)^2$$

从1~m之间改变 T ,求上式为最大值时的 T ,既最大方差阈值

6.2 阈值分割

2 阈值的选取

★最大方差阈值选取法

可以将最大方差阈值推广到双阈值分割,根据上面的公式推广为:

$$\delta^2(\theta_1, \theta_2) = w_{0,1} [w_0(\mu_0 - \nu_{0,1})^2 + w_1(\mu_1 - \nu_{0,1})^2]$$

$$+ w_{12} [w_1(\mu_1 - \nu_{1,2})^2 + w_2(\mu_2 - \nu_{1,2})^2]$$

$$+ w_{0,2} [w_0(\mu_0 - \nu_{0,2})^2 + w_2(\mu_2 - \nu_{0,2})^2]$$

6.2 阈值分割

3 影响图素：噪音、照度不均匀，结构特征。

注意：人的识别不是绝对值，而是对灰度变化最敏感。

①简单情况下取直方图谷值点作分割阈值。

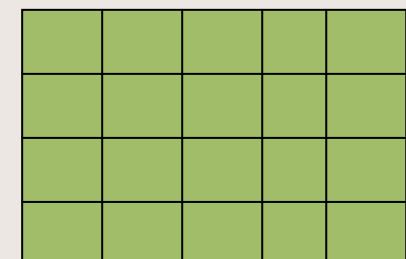
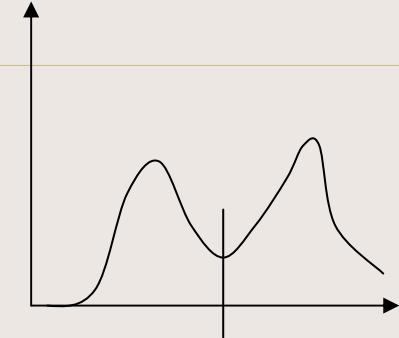
②图象中有噪音干扰，先做平滑处理，后取门限。

③光照不均匀：

a 先修正光照不均匀，再取门限。

b 分区分割

目的：减少光照不均匀而影响的分割效果。



④多波段：

R、G、B多幅直方图同时出现谷值。

⑤取局部特征：如纹理——粗糙度

此结构特征优于灰度特征，因为与结构有关，若取局部特征，并对局部特征图平滑之后，再取阈值，则效果更好。

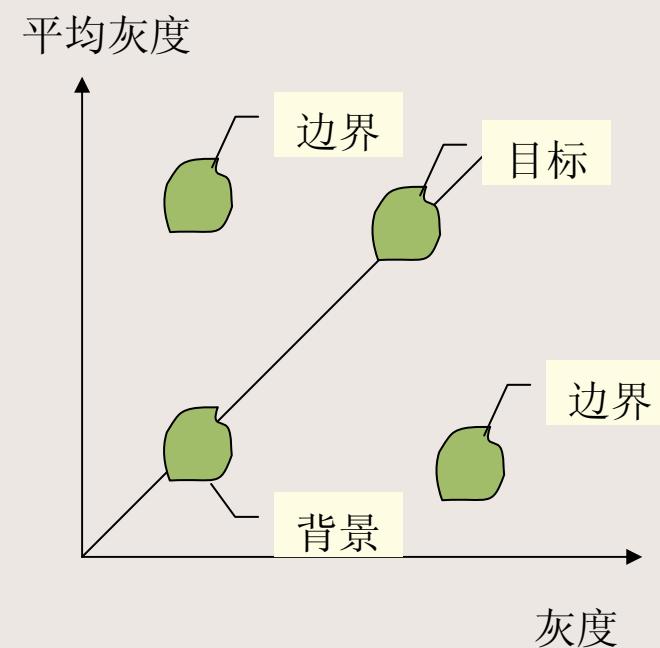
⑥多特征阈值分割

a 灰度及平均灰度(3×3 区)二维直方图

——若集中于对角线区则表示灰度均匀区。

——若远离对角线者（灰度与平均灰度不同）是区之边界。

（近对角线构成直方图有明显峰值及阈值，远离对角线者可用灰度平均值作为阈值，用于区分两个区）。



b 灰度与灰度梯度图



c 多波段:

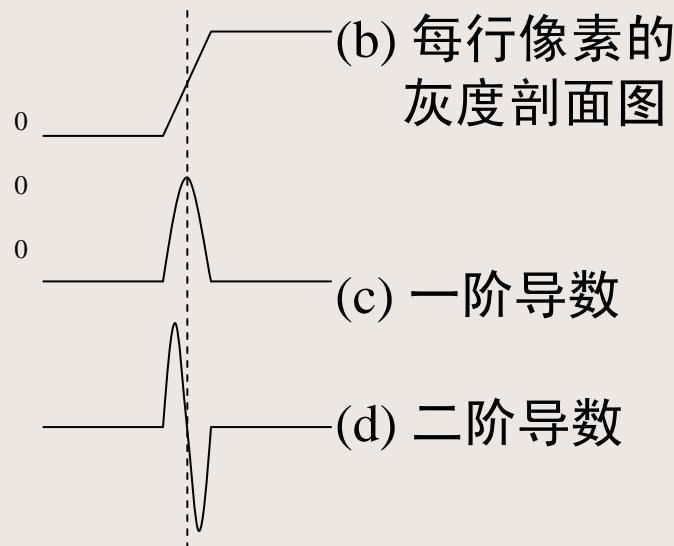
R、G、B可分别组成R-B, G-B, R-B两维直方图, 图上强的地方反映一个区。

6.3 边缘检测法

1 边缘检测原理：其导数在边缘方向取得极值



(a) 一幅纵向
边缘的图像



从数学上看，图像的模糊相当于图像被平均或积分，为实现图象的锐化，必需用它的反运算“微分”——加强高频分量作用，使轮廓清晰。

6.3 边缘检测法

1 边缘检测原理：

梯度对应一阶导数，对于一个连续图像函数 $f(x,y)$ ：

$$\text{梯度矢量定义: } \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} G_x & G_y \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{梯度的幅度: } |\nabla f(x, y)| = \text{mag}(\nabla f(x, y)) = (G_x^2 + G_y^2)^{1/2}$$

$$\text{梯度的方向: } \phi(x, y) = \arctan(G_y / G_x)$$

①求导取阈值——抽取边界，实质是在图像梯度图上取阈值来找出边缘。

算子： Robot、 Sobel等。

②曲面拟合法

以某一点的邻域的灰度拟合成某一曲面，将拟合后曲面梯度作为该象素点的梯度。

如最简单用 $z = f(x,y) = ax+by+c$ 函数与 $f(x,y)$, $f(x+1,y)$, $f(x,y+1)$, $f(x+1,y+1)$ 拟合

x,y	x+1,y
x,y+1	x+1,y+1

拟合误差：

$$\begin{aligned} E(a,b,c) = & [ax+by+c-f(x,y)]^2 + [a(x+1)+by+c-f(x+1,y)]^2 + \\ & [ax+b(y+1)+c-f(x,y+1)]^2 + [a(x+1)+b(y+1)+c-f(x+1,y+1)]^2 \end{aligned}$$

使 $\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial c} = 0$

可得: $a = \frac{f(x+1, y) + f(x+1, y+1)}{2} - \frac{f(x, y) + f(x, y+1)}{2} \rightarrow$ 水平差分

$b = \frac{f(x, y+1) + f(x+1, y+1)}{2} - \frac{f(x, y) + f(x+1, y)}{2} \rightarrow$ 垂直差分

$c = \frac{1}{4} [3f(x, y) + f(x+1, y) + f(x, y+1) - f(x+1, y+1)] - ax - by$

曲面 $z = ax + by + c$ 之梯度值为

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

6.4 生长法

区域分割：利用的是图像的空间性质，认为分割出来的属于同一区域的像素应具有相似的性质。

1 区域生长法：

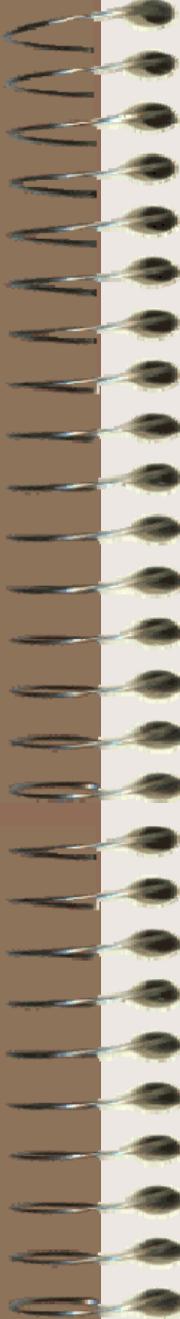
算法描述：先对每个需要分割的区域找一个种子像素作为生长的起点，将种子像素邻域中与其有相似性质的像素合并到种子像素所在的区域中。将这些新像素当作新的种子像素重复上述过程，直到再没有满足条件的像素被包括进来。

1	0	4	7	5
1	0	4	7	7
0	1	5	5	5
2	0	5	6	5
2	2	5	6	4

原图

1	1	5	5	5
1	1	5	5	5
1	1	5	5	5
1	1	5	5	5
1	1	5	5	5

T=3时的生长结果



6.4 生长法

区域生长法---关键问题

- a) 选择或确定一组能正确代表所需区域的种子像素
人机交互、通过直方图峰值
- b) 确定在生长过程中能将相邻像素包括进来的准则，即生长准则
基于区域灰度差方法、基于区域内灰度分布统计性质方法、自适应阈值结节检测法



6.4 生长法

区域生长法生长准则——基于区域灰度差方法

- ① 对像素进行扫描，找出尚没有归属的像素；
- ② 以该像素为中心检查它的邻域像素，即将邻域中的像素逐个与它比较，如果灰度差小于预先确定的阈值 T ，将它们合并；
- ③ 以新合并的像素为中心，返回到步骤②，检查新像素的邻域，直到区域不能进一步扩张；
- ④ 返回到步骤①，继续扫描直到所有像素都有归属，则结束整个生长过程。

讨论：
生长准则与欠分割或过分割现象

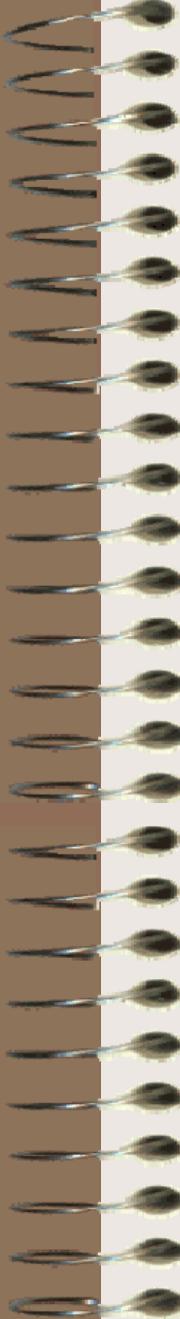
1	0	4	7	5
1	0	4	7	7
0	1	5	5	5
2	0	5	6	5
2	2	5	6	4

1	1	5	7	5
1	1	5	7	7
1	1	5	5	5
2	1	5	5	5
2	2	5	5	5

T=1

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

T=6



6.4 生长法

区域生长法生长准则——基于区域内灰度分布统计性质

这里考虑以灰度分布相似性作为生长准则来决定区域的合并，具体步骤为：

- ① 把像素分成互不重叠的小区域；
- ② 比较邻接区域的累积灰度直方图，根据灰度分布的相似性进行区域合并；

6.4 生长法

区域生长法生长准则——基于区域内灰度分布统计性质

灰度直方图 $h(x)$ 的累积灰度直方图被定义为：

$$H(X) = \sum_{i=0}^X h(i)$$

① Kolmogorov-Smirnov 检测

$$\max_X |H_1(X) - H_2(X)|$$

② Smoothed-Difference 检测

$$\sum_X |H_1(X) - H_2(X)|$$

6.4 生长法

区域生长法生长准则——自适应阈值结节检测法

先从目标（结节）上一个小种子点的象素开始生长，当所谓孤立对照（Isolation Contrast Integral）值达到最大时停止生长。

说明：

① 种子点选取： 3×3 或 5×5 等区中间灰值最大点。

人工干预指定点。

② ICI值：

$$ICI = \sum_i [g(P_{mi}) - \text{Max } g(P_{ej})]$$

其中： $g(P_{ej})$ ：边界象素 P_{ej} 灰度值；

$g(P_{mi})$ ：为目标结节第*i*个点的灰度值。

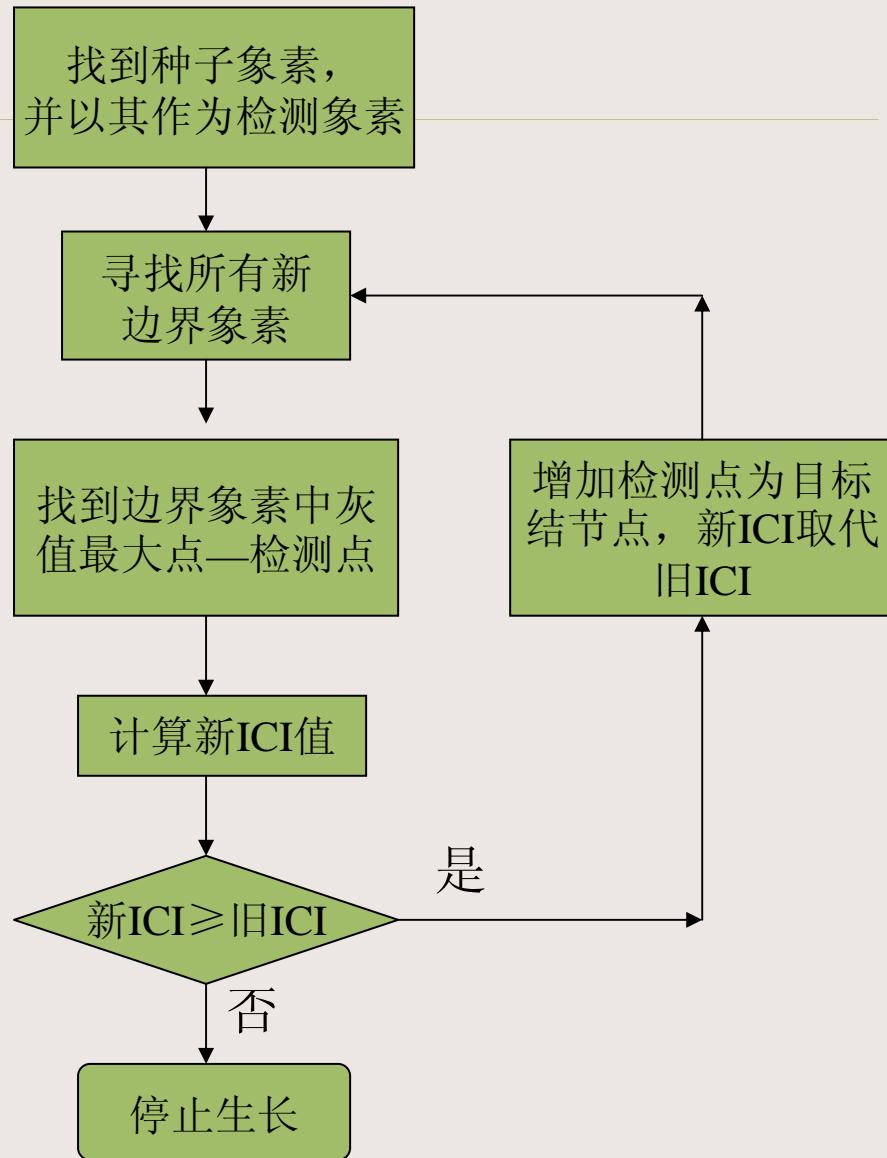
自适应阈值结节检测法流程

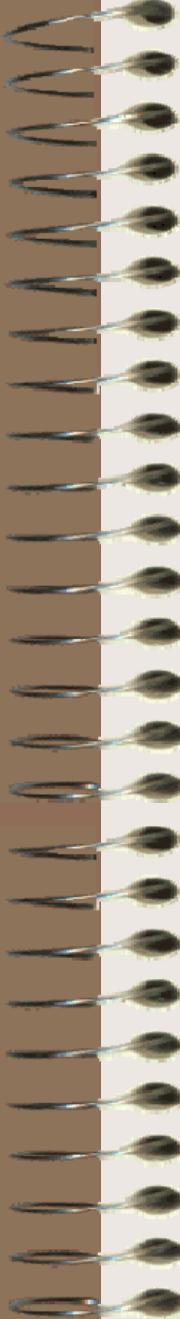
灰度值

行

列

算法流程





6.4 生长法

区域生长法生长准则——自适应阈值结节检测法

讨论：

- ①实质上由灰值最大点一圈圈向周围扩大（灰值逐渐降低）遇平原灰值增加停止生长。
- ②可进一步扩充， ICI稍降低些也可不停止生长， 可抗噪声干扰。
- ③可用别的特征代替ICI特征，在其它条件下获得更加好结果。



6.4 生长法

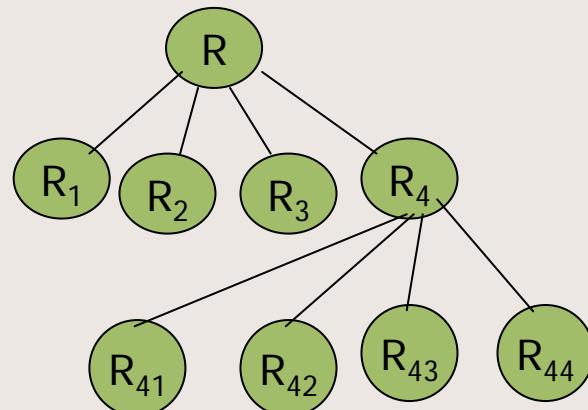
2 分裂合并法

区域生长法是先从单个种子像素开始通过不断接纳新像素最后得到整个区域。分裂合并法是先从整幅图像开始通过不断分裂得到各个区域。实际中常先把图像分成任意大小且不重叠的区域，然后再合并或分裂这些区域以满足分割的要求

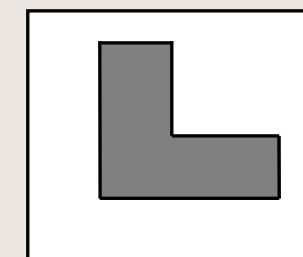
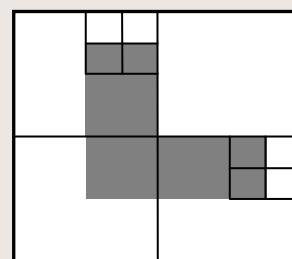
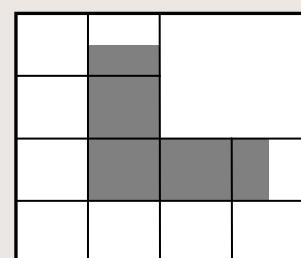
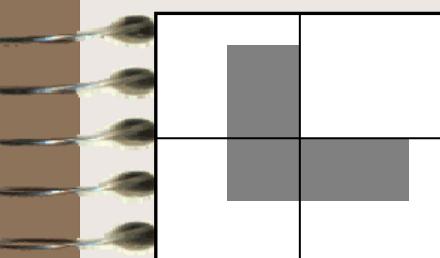
6.4 生长法

2 分裂合并法:

R_1	R_2
R_3	R_{41} R_{42}
	R_{43} R_{44}



简单的区域分裂过程



分裂合并法分割图像示例

6.5 贯序分割

[以前讨论仅涉及单个点或单个点的固定小邻域——局部处理性质，有局限性，但便于并行处理——与处理顺序无关。

讨论全局性——通过邻点相互影响而扩大影响范围，顺序先后有关，用较简单方法，选出开始点后，用较复杂算法追踪其余点。]

人的识别具有全局性，相关性。先找到肯定的边界点，对其邻点可放宽要求。

右图：

0~15灰值范围，
一条斜直线，取阈值
8，间断了，阈值4，
引入很多噪声点。

15					
	15			5	
		13			8
			9		
				5	
	11			4	
					9
					10

6.5 贯序分割

1) 光栅扫描方式:

选定两个阈值——检测阈值d，跟踪阈值t， $d > t$ 。起点要求严，中间点由于有相互关系可放松要求。

$$d = 9, \quad t = 4$$

a 逐行扫描找出 $>d$ 的象素点 (x, y)

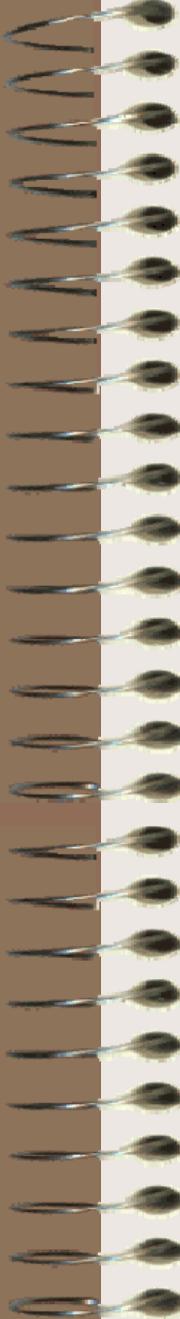
b 根据已知 (x, y) 在 $(x+1, y-1)$ ， $(x+1, y)$ ， $(x+1, y+1)$ 三点中判断是否有 $>t$ 的点（放宽要求）。

优点：搜索简单，全图每个象素只访问一次。

问题：a 与扫描方向有关，由弱 \rightarrow 强之曲线可能丢失一段。

可以用逐列搜索加以解决

b 不能跟踪扫描方向外的点。



6.5 贯序分割

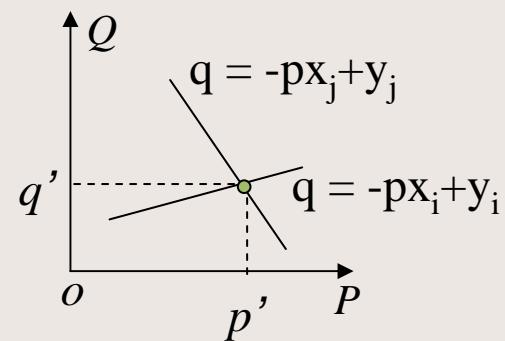
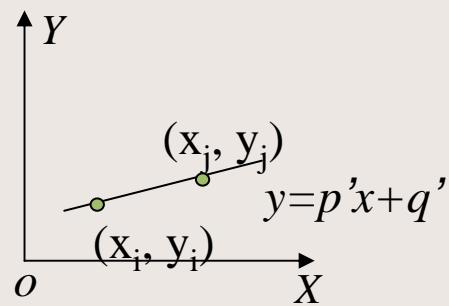
2) 全面跟踪

把检测到的起始点的八个邻点均作为候选点。然后：

- a 找到一个起始点开始跟踪。
- b 若在该起始点有多个合格候选点，取一个点继续跟踪，余者入栈。
- c 若一条线跟踪结束后，再从栈中取出一点做跟踪处理。
- d 全部栈中用完后，找下一个检测合格起点。
- e 全图扫描完结束。

6.5 hough变换

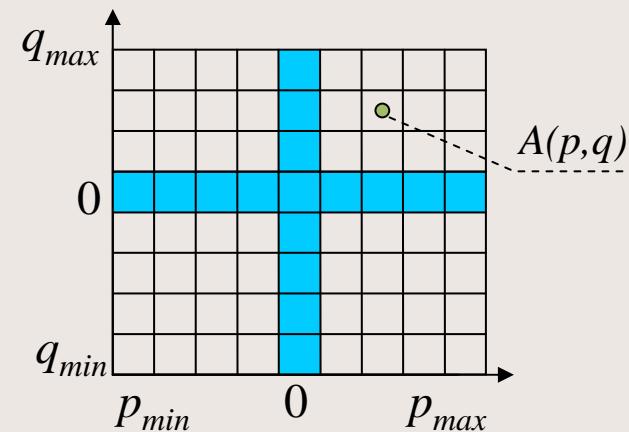
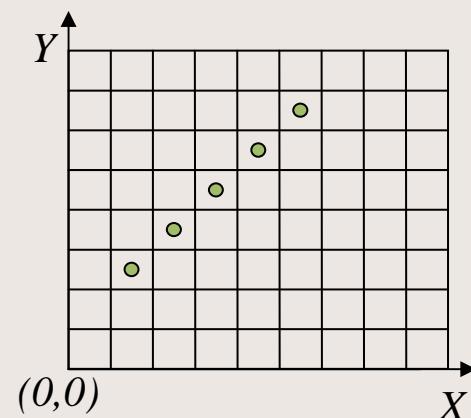
Hough变换是一种检测、定位直线和解析曲线的有效方法。它是把二值图变换到Hough参数空间，在参数空间用极值点的检测来完成目标的检测。下面以直线检测为例，说明Hough变换的原理。



图像空间和参数空间中点和线的对偶性

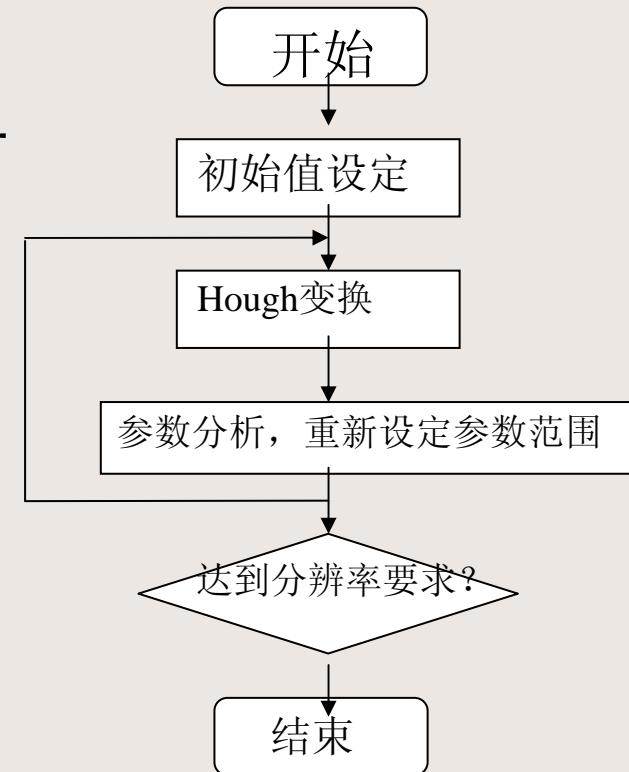
6.5 hough变换

图像的Hough变换如下图, p_{min} , p_{max} , q_{min} , q_{max} 可以根据先验知识设定, 累加数组的大小由检测分辨率以及 p_{min} , p_{max} , q_{min} 和 q_{max} 来决定



6.5 hough变换

随着检测分辨率的提高，时间以及空间花费越来越大，可以采用分级变换加以解决



分级Hough变换流程图

6.5 hough变换

Hough变换检测二次曲线---以圆为例

圆的方程:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

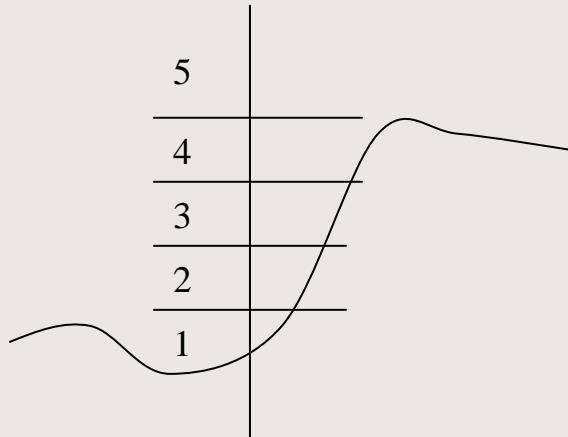
Hough变换的优点是抗噪声能力强，能够在信噪比较低的条件下，检测出直线或解析曲线。缺点是需要首先做二值化以及边缘检测等图像预处理工作，损失掉原始图像中的许多信息，给它的应用带来了一定的局限性。

6.9 图像编辑——分割二值图像编辑处理

按某一准则分区结果往往不理想，为此结果需整理——编辑，使之与人的直觉一致。

与人直觉不一致原因有三：

- ①干扰造成的多余小区；
- ②区域间光滑过渡分成了许多小区；
- ③人眼略去缓慢变化，而把缓慢变化的区应略去。



常用处理方法：

① 规定区域尺寸小于某个阈值合并之：

（检查每区尺寸大小，及其与邻区之特征差，若区小，则可放宽合并条件，合到大区中，以消除前两个因素造成的小区；

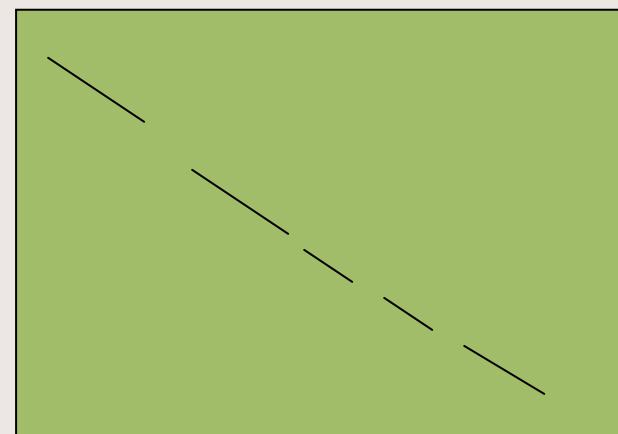
② 检查区域边缘的灰度梯度，删除小于规定值的区域；

③ 检查每个区域邻区个数，区小且邻区只有一个时，可放宽删除条件；

④ 区域形状特征（小点可放宽）。

另一个问题：

不连续的线变成连续线（机械分割与人眼视常差别的修正）。



连线 (Hough) 霍夫变换:

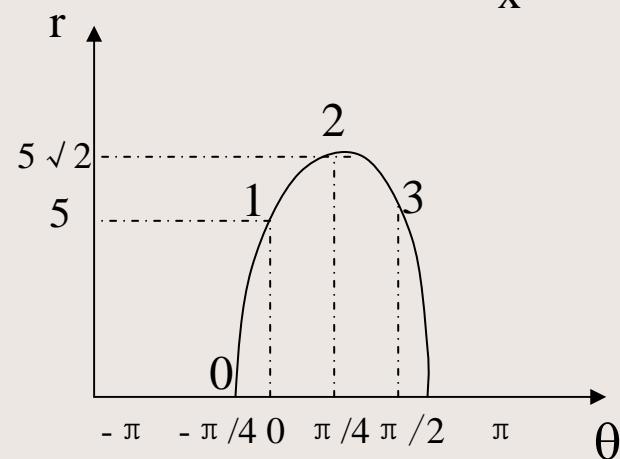
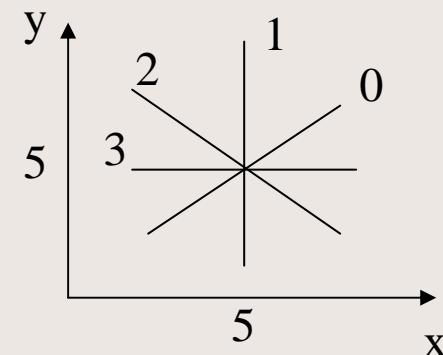
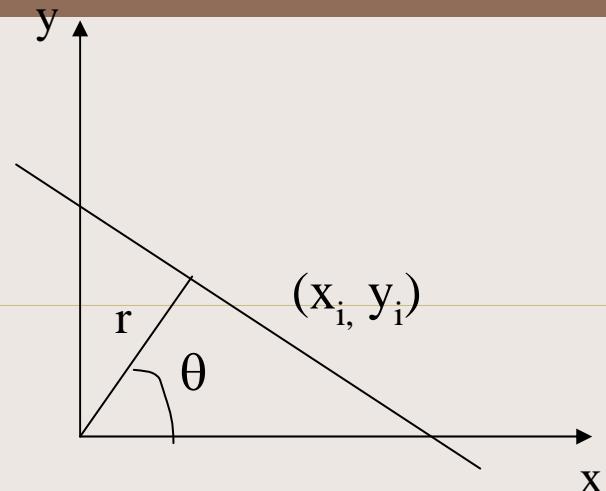
现象: 落在同一直线上的点的方程:

$$(X_i Y_i)$$

$$x_i \cos \theta + y_i \sin \theta = r$$

① 即通过同一直线的点有相同之 r 、 θ , 或者说一条直线在 r - θ 坐标系上是一个点, 即由 x - y 坐标系一条直线, 到 r - θ 坐标系上的一个点的变换。

② 当 x 、 y 固定时, $r=f(\theta)$ 是曲线, 过 x - y 上一个点的各线, 对应 r 、 θ 上一条线。



霍夫变换：

$x-y$ 面上共线点在 $r-\theta$ 平面上必有公共点，该公共点即为直线参数。由此可根据 $r-\theta$ 面上交点可判定 $x-y$ 平面上的直线。

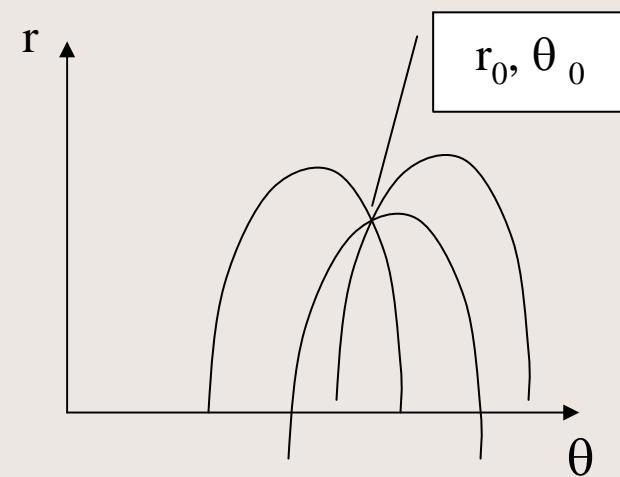
离散域上具体实现：

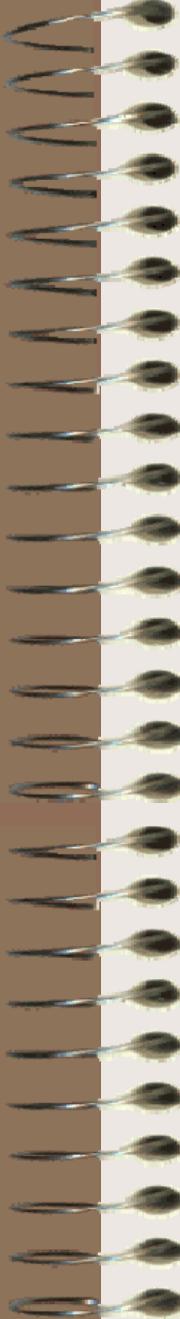
① r 、 θ 量化， θ 可取 $0 \sim 2\pi$ ， r 根据实际图像定取值范围；

（变成 r 、 θ 网格计数问题）

② 对每个 (x_i, y_i) 点在其相应之 $r-\theta$ 网格对应曲线部分加1（即可按 x_i, y_i 计算出相应之 $r-\theta$ 曲线）；

③ 找出网格上累计值大于某一门限的点，找出对应的直线段。





讨论:

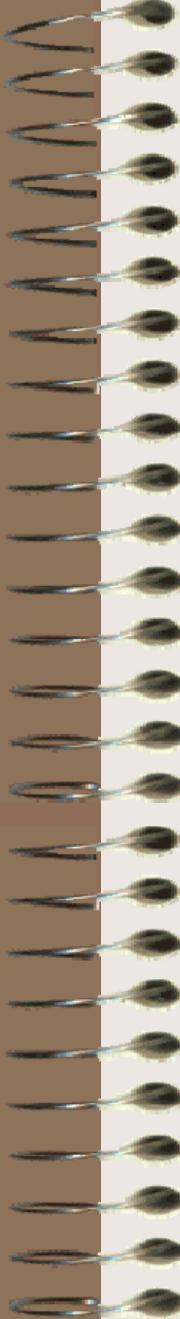
- ① 量化间隔大（粗）则两条很近的线混在一起，分辨率低；
- ② 量化间隔小（细）允许共线误差小，有可能丢失线条；
- ③ Hough变换原理可推广到任意曲线：
 $f(a_0, a_1, \dots a_n, x, y) = 0$ ——空间曲面，每一个x, y对应一组 $a_1 \dots a_n$ 系数，共线点系数相同（到另一变换域去思考问题）。



应用举例：

金融表格图像处理模块技术开发

- 应甲方要求，开发设计用于银行票据图像处理的软件基础函数模块。用于甲方开发的银行票据清分存档主界面软件。
- 基础函数模块主要包括图像预处理、清分模块、定位模块，提取模块，复原模块，图像压缩等模块。

- 
- 1、剪裁纠偏模块：对黑边、白边票据分别进行了实验，编制了不同的处理模块，使之适应了不同类型的票据；
 - 2、模板图像分类模块：设计了一种快速有效的图象分类算法，达到了很高的配准精度；
 - 3、精定位模块：根据表格的特定信息点，设计实现了模板与实际票据的精确定位；
 - 4、差异图提取模块：用形态学方法有效实现了对差异图的提取；
 - 5、表格图象压缩模块：根据表格数据的特殊性质，设计实现了特有的图象压缩算法；
 - 6、表格图象解压缩：对特定格式压缩后的图象进行解压缩；
 - 7、图像恢复：利用图象融合技术，对模板图和解压后的差异图进行融合叠加。

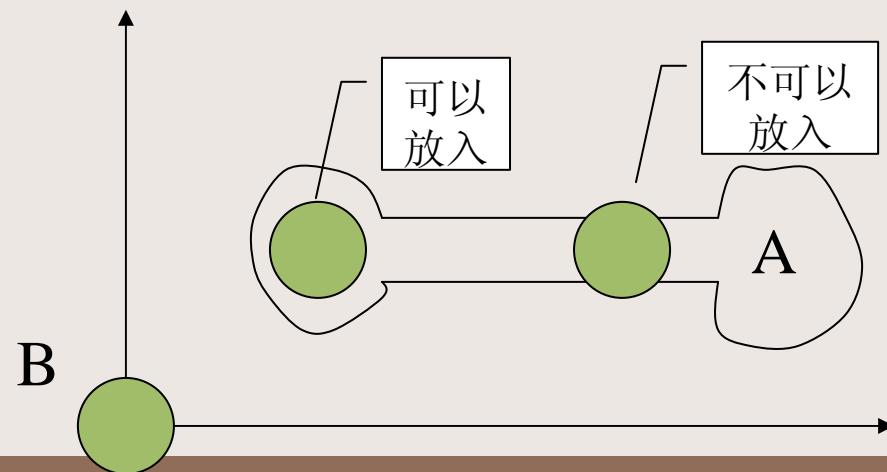
6.10 图像形态学方法：

数学形态学 (Mathematics Morphology) 形成于1964年，法国巴黎矿业学院马瑟莱 G. Matheron) 和其学生赛拉 (J. Serra) 从事铁矿核的定量岩石学分析，提出了该理论。目前，其已构成了一种新型的图像处理方法和理论。在文字识别，显微图像分析、医学图像、工业检测、机器人视觉都有很成功的应用。该研究正在不断发展和扩大。

形态学研究几何结构的基本思想：

利用一个结构元素 (structuring element) 去探测一个图像，看是否能将这个结构元素很好地填放在图像的内部，同时验证填放结构元素的方法是否有效。

构造不同的结构元素，便可完成不同的图像分析，得到不同的分析结果。



一、二值腐蚀和膨胀

1. 腐蚀 (erode)

平移: 将一个集合A平移距离X可以表示为 $A+x$, 定义为:

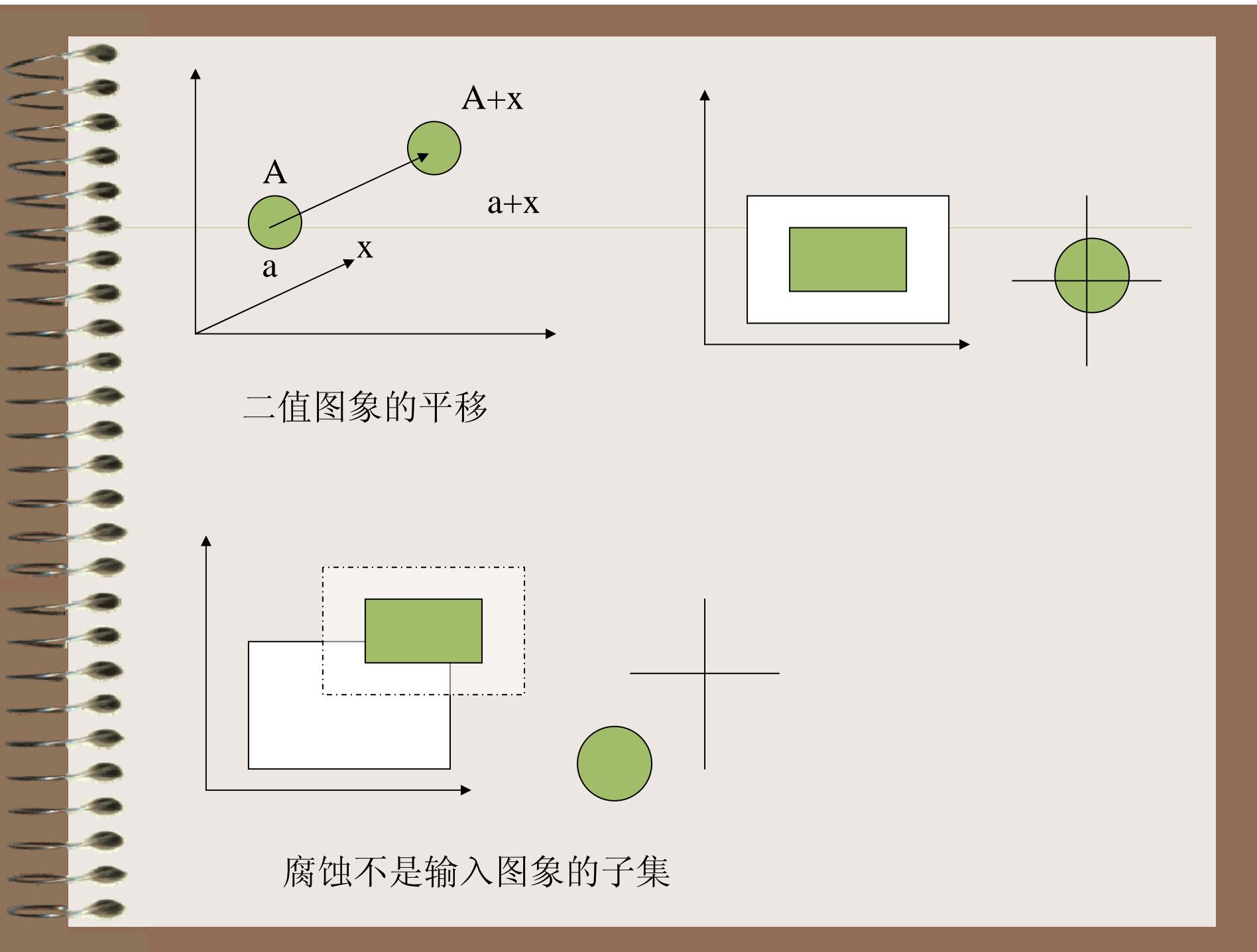
$$A+x = \{a+x: a \in A\}$$

集合A被集合B腐蚀, 表示为 $A \ominus B$, 定义为:

$$A \ominus B = \{x: B+x \subset A\}$$

输入图 结构元素 子集关系

$A \ominus B$ 由将B平移X但仍包含在A内的所有点X组成。如果B看作为模板, 则 $A \ominus B$ 由在平移模板的过程中, 所经可以填入A内部的模板的原点组成。



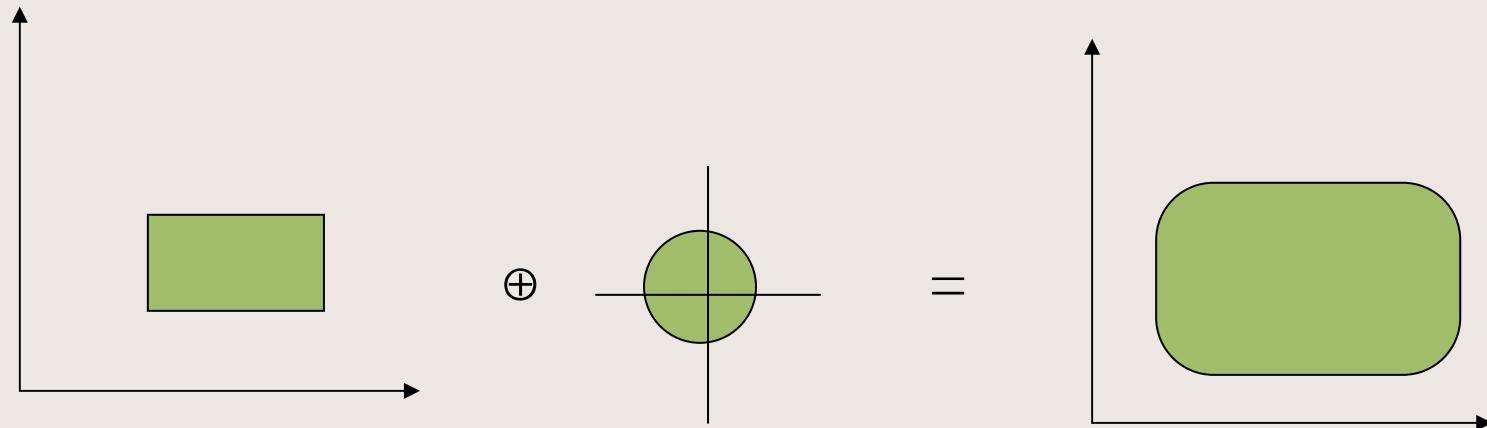
2. 膨胀 (dilate)

A 被 B 膨胀表示为: $A \oplus B$ 定义: $A \oplus B = [A^C \ominus (-B)]^C$ C : 补集

也可: $A \oplus B = \cup \{A+b : b \in B\}$ —明克夫斯基和

或: $A \oplus B = \cup \{B+a : a \in A\}$

如果结构元素为一个圆盘, 那么膨胀可填充图像中的小孔。



二、二值图像的开运算和闭运算

1. 开运算 (open)

图像B对图像A作开运算:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

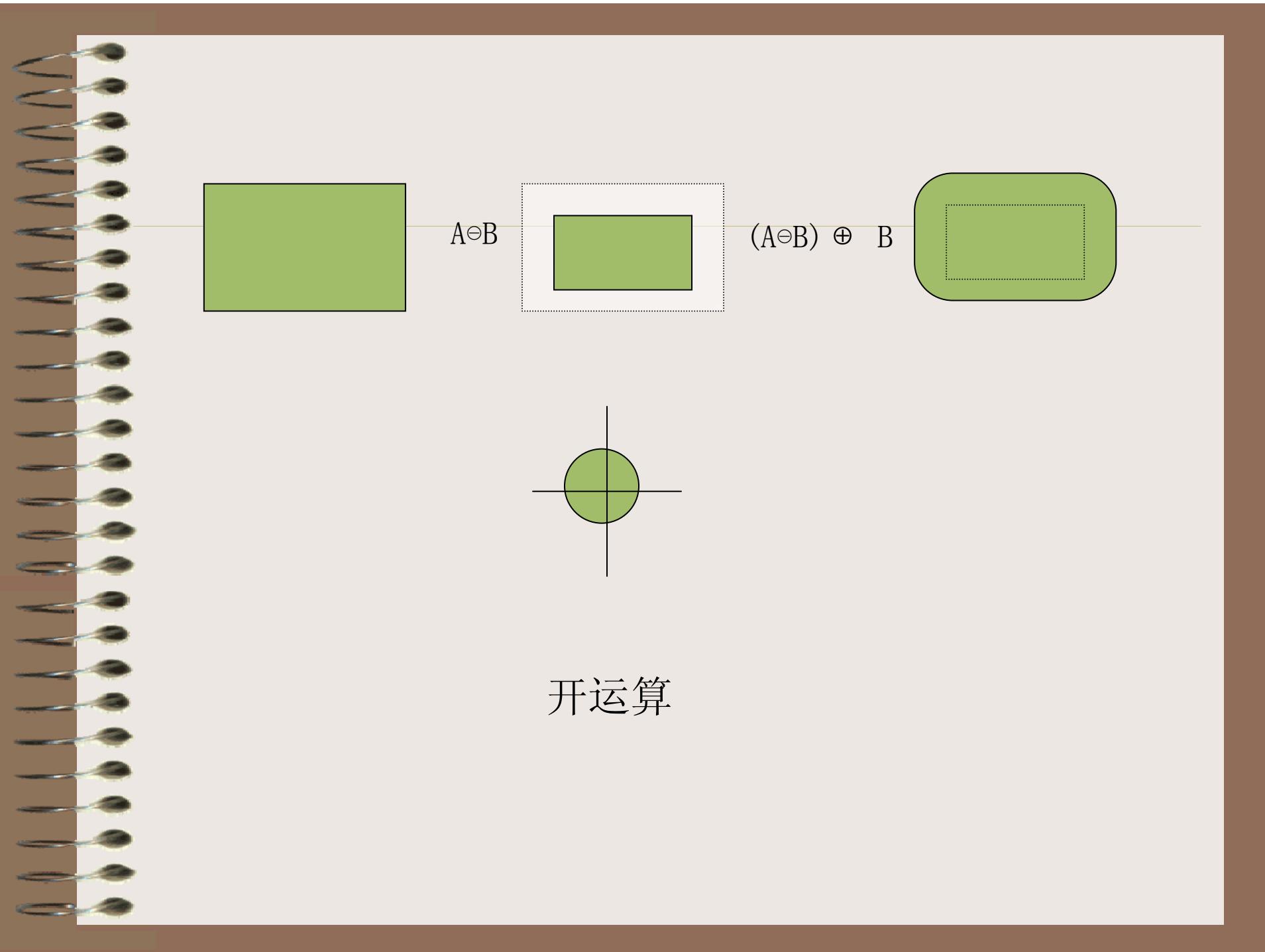
$$\text{等价: } A \circ B = \bigcup \{B+x : B+x \subset A\}$$

作用:

①利用圆盘作开运算起到磨光内边缘的作用;

②圆盘的圆化作用可以得到低通滤波的效果。

开运算可以通过计算所有可以填入图像内部的结构元素平移的并求得。



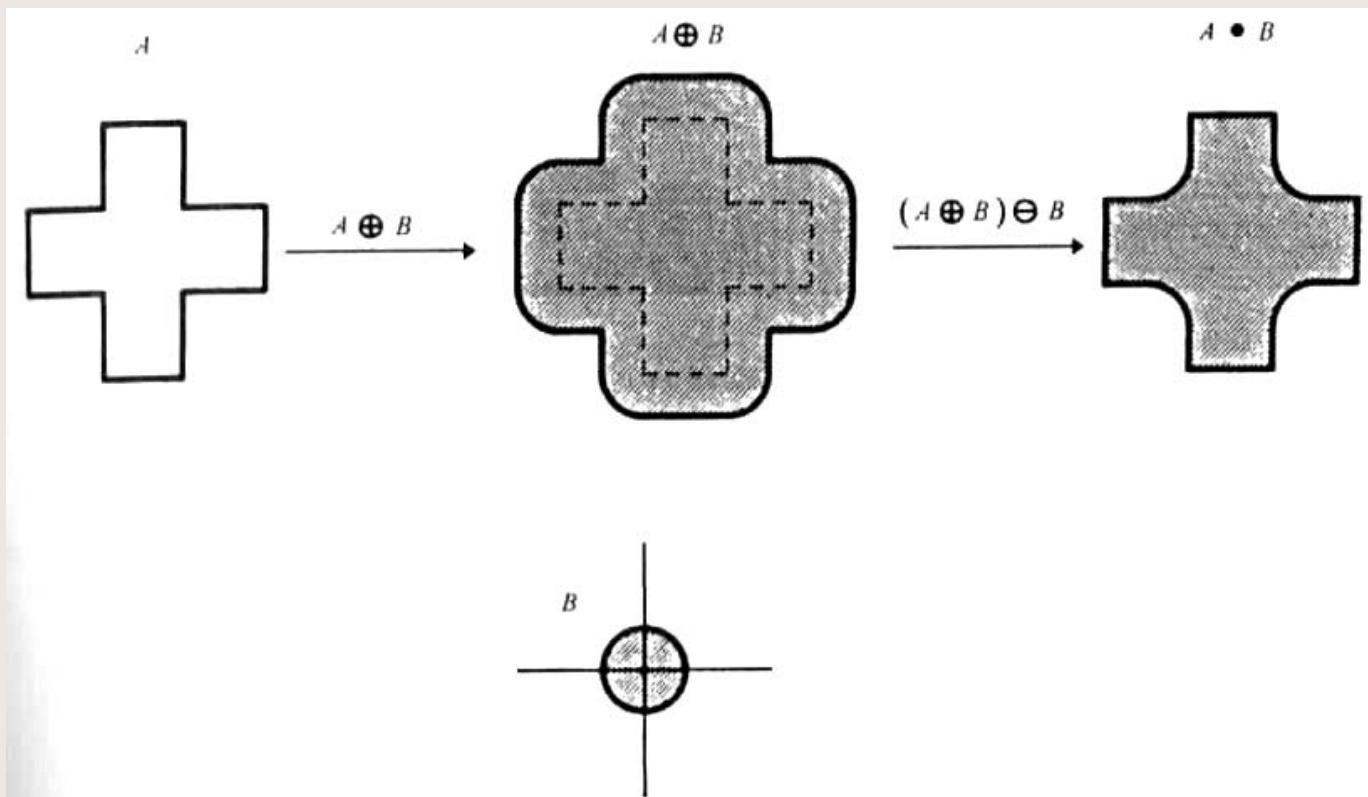
2. 闭运算 (close)

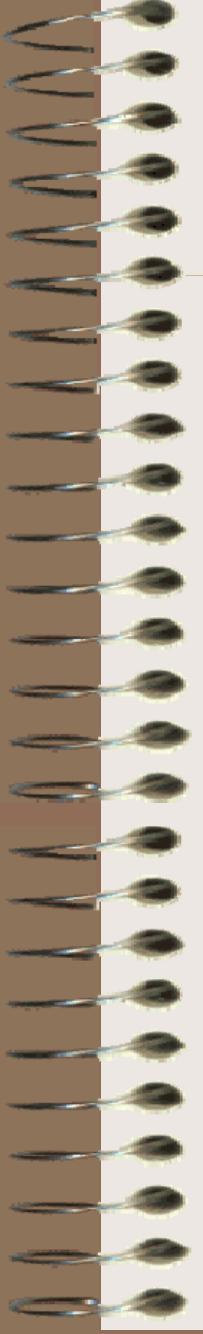
其是“开”的对偶运算，利用B对A作闭运算表示为：

$$A \cdot B = [A \oplus (-B)] \ominus (-B)$$

有: $A \cdot B = (A^C \circ B)^C$

作用: 闭运算可对图形的外部作滤波，仅仅磨光了凸向图像内部的尖角。





三、击中击不中变换 (Hit-or-Miss Transform) — 塞拉变换

1. 定义：同时探测图像的内部和外部，对研究图象中物体与背景之间的关系很有效。解决类似于目标识别，细化问题。

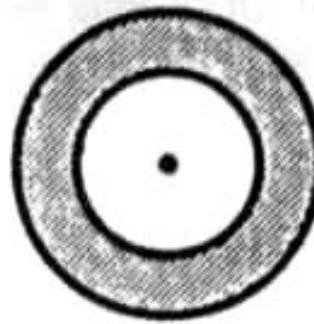
两个结构元素E、F，将其作为一个结构元素B=(E, F)，一个探测图象内部，另一个探测图象外部，定义为：

$$A * B = (A \ominus E) \cap (A^C \ominus F) \quad E \cap F = \emptyset$$

当且仅当E平移到某一点时可填入A的内部，F平移到该点时可填入A的外部时，该点才在击中击不中变换的输出中。



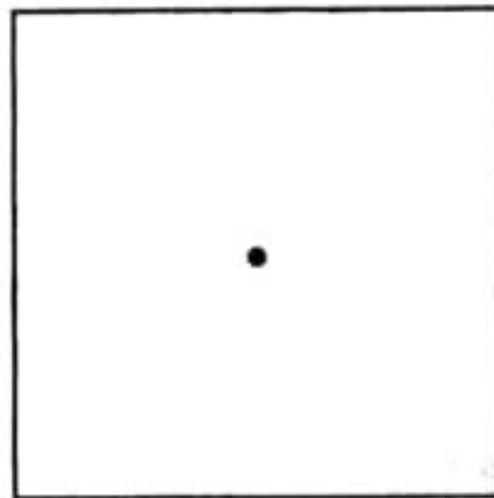
E
(a)



F
(b)



(c)



(d)

(a) 击中结构元素 (b) 击不中结构元素 (c) 输入图象 (d) 击中击不中输出

图 4.1 击中击不中变换

2. 可用于识别物体

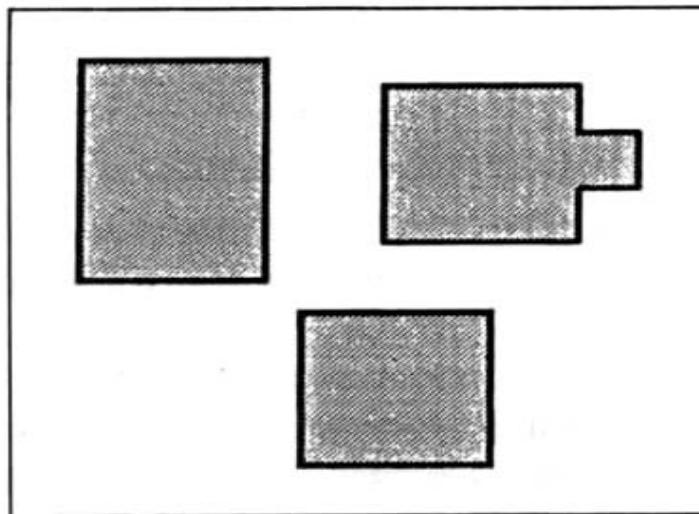


图 4.2 三个物体的图象

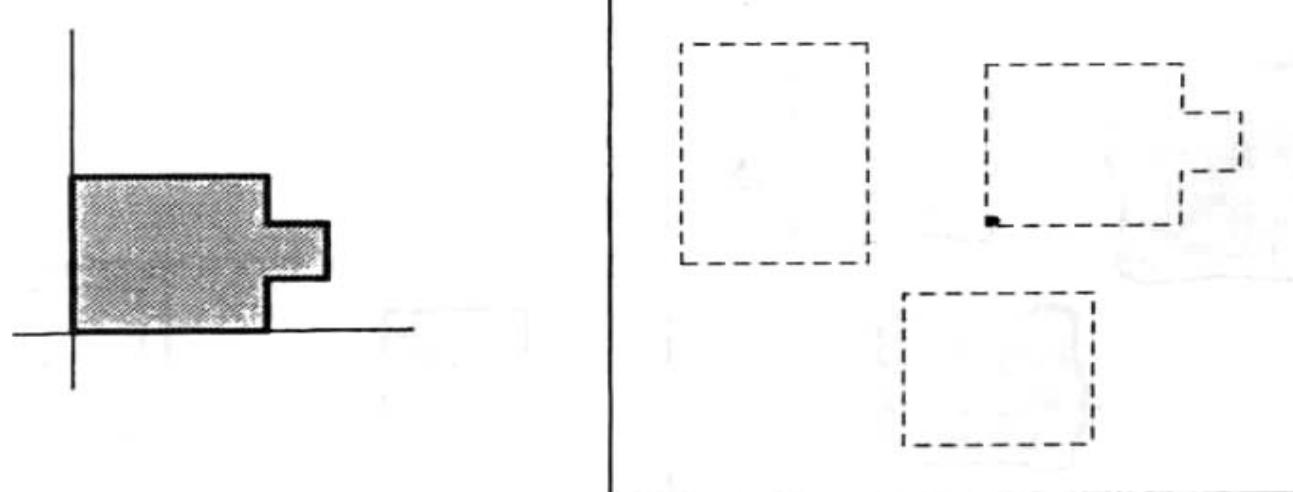


图 4.3 利用与目标相同的结构元素作腐蚀, 实际上相当于模板匹配过程

3. 细化——提骨架

是一种常见的使用击中击不中变换的形态学算法。

对于结构 $B = (E, F)$ 利用 B 细化 S 定义为：

$$S^{\otimes}B = S \setminus (S * B)$$

即 $S^{\otimes}B$ 为 $S * B$ 与 S 的差集。

更一般地，利用结构对序列 $B^1, B^2 \dots B^K$ ，迭代地产生输出序列：

$$S^1 = S^{\otimes}B^1, \dots S^k = S^{k-1} \otimes B^k$$

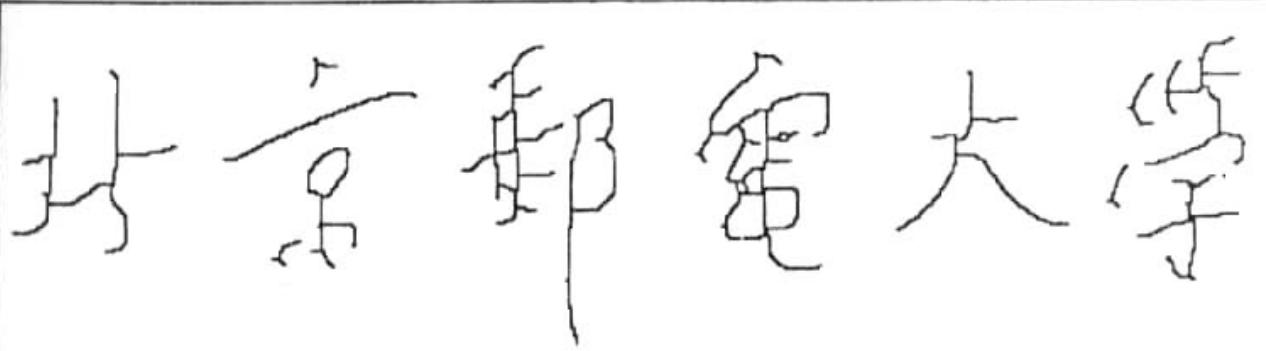
$$\text{或 } \{S^i\} = S^{\otimes} \{B^i\} = (\dots ((S^{\otimes}B^1) \otimes B^2) \dots \otimes B^k)$$

随着迭代的进行，得到的集合也不断细化。



北京郵電大學

(a)



北京郵電大學

(b)

(a) 原始图象 (b) 细化结果

图 4.10 细化算法实例



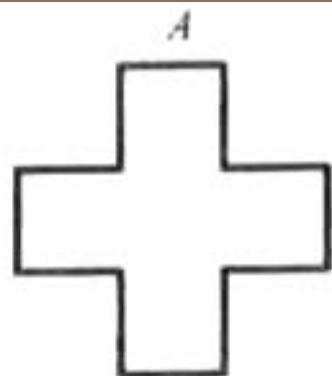
四、二值图像形态学处理

1. 边界检测

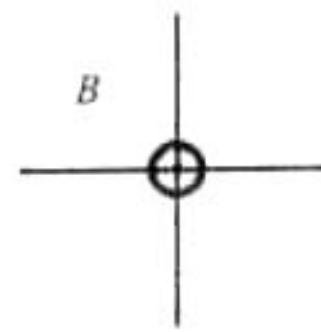
外边界: $(A \oplus B) \setminus A$

内边界: $A \setminus (A \ominus B)$

形态学梯度: $(A \oplus B) \setminus (A \ominus B)$



(a)



(b)



$(A \oplus B) \setminus B$
(c)



$A \setminus (A \ominus B)$
(d)



$(A \oplus B) \setminus (A \ominus B)$
(e)

(a) 原图象

(b) 结构元素

(c) 外边界

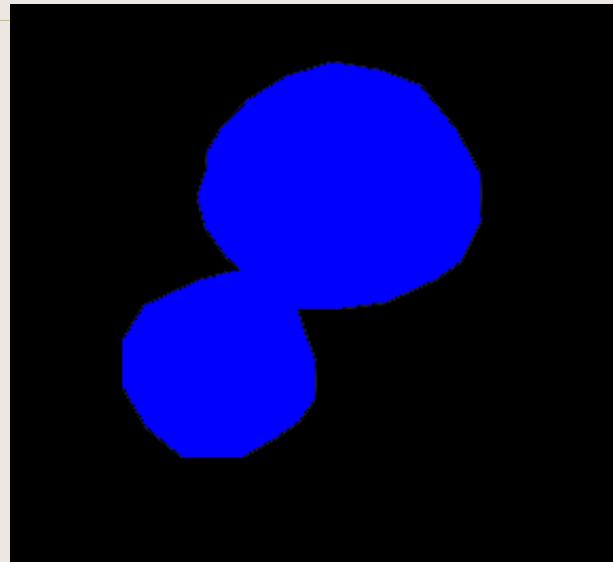
(d) 内边界

(e) 形态学梯度

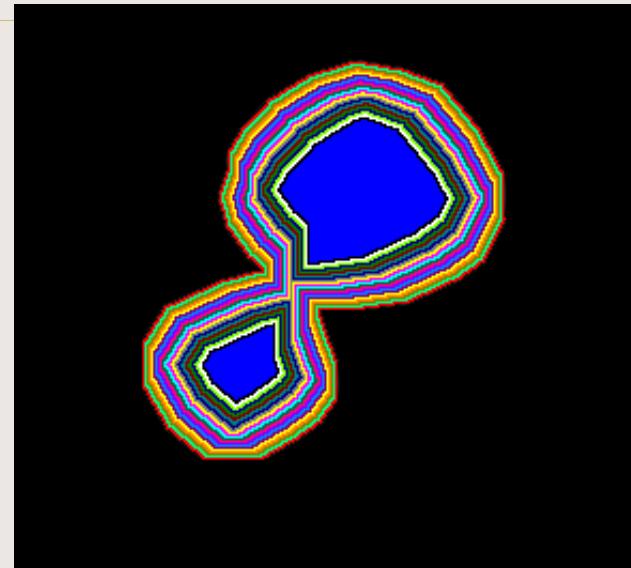
图 5.3 形态学边界

2. 流域分割 (watershed split)

极限腐蚀



图a 粘连目标图



图b 极限腐蚀结果



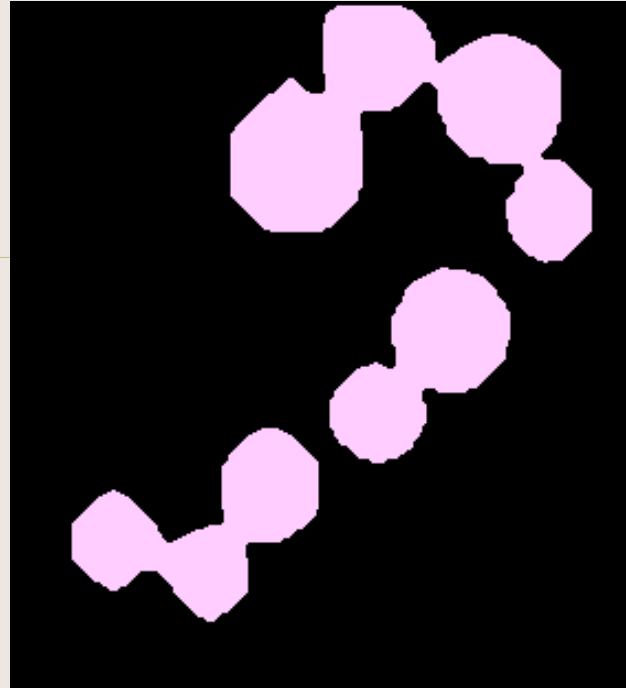
水域生长

由于膨胀是腐蚀的逆过程，所以对对象核进行膨胀处理由于膨胀的扩张作用而达到由对象核生长的效果，如果不加其它控制的话最后就膨胀为原来的粘连对象了；但如果在对象核生长的过程中应用水域的概念和性质（在图象处理中水域最初提出在水域分割中^[2]）情况就有所不同了，这种生长方式称之为水域生长。

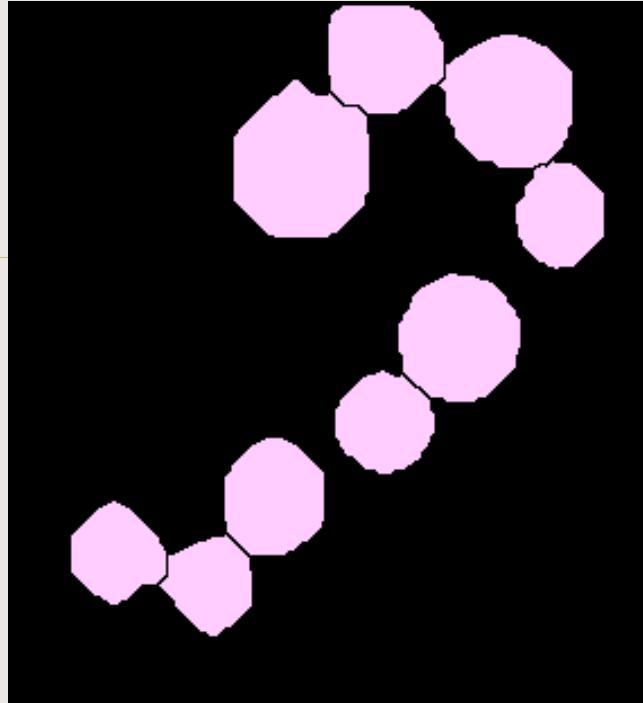
在前面极限腐蚀后获得了对象核，接着须对对象核进行标记，标记成不同标记值的对象核称之为不同的域，根据水域增水时各域水位同步上升的原理，水域生长时各域保持同层位增长，至域间生长到相遇时即为分水岭，此时形成分界线。粘连对象的切割和分离的实质就是在最后找出分界线。实际算法中将腐蚀掉的点按层保存，水域生长时从最里层开始逐层回贴处理，同时在层间逐点验证属于各域生长部分或是域间分界线：邻域内出现多类域目标时为分界线上的点，出现一类域目标时则为该类域生长部分。

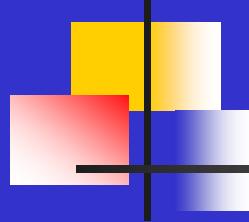


图a 粘连对象原图



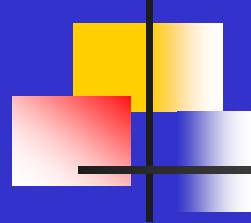
图b 粘连对象分离图





第七章 数学形态学在图像处理中的应用

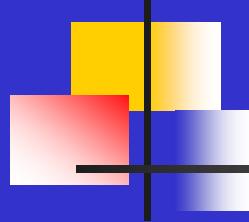
- 一、数学形态学概述
- 二、数学形态学基本算法
- 三、二值图像的形态学处理
- 四、灰值形态学



一、数学形态学概述

1、起源：

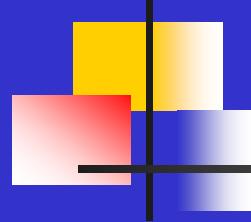
数学形态学（Mathematics Morphology）形成于1964年，法国巴黎矿业学院马瑟荣（G. Matheron）和其学生赛拉（J. Serra）从事铁矿核的定量岩石学分析，提出了该理论。



一、数学形态学概述

2、发展：

数学形态学是一门建立在严格数学理论基础上的学科，其基本思想和方法对图像处理的理论和技术产生了重大的影响。目前，形态学图像处理已成为数字图像处理的一个主要研究领域。在文字识别、显微图像分析、医学图像、工业检测、机器人视觉都有很成功的应用。

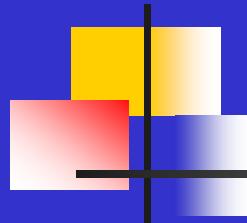


一、数学形态学概述

3、定义：

数学形态学（Mathematical Morphology）是分析几何形状和结构的数学方法，它建立在集合代数的基础上，是用集合论方法定量描述目标几何结构的学科。

这种结构表示的可以是分析对象的宏观性质，例如，在分析一个工具或印刷字符的形状时，研究的就是其宏观结构；也可以是微观性质，例如，在分析颗粒分布或由小的基元产生的纹理时，研究的便是微观结构。



一、数学形态学概述

4、形态学研究几何结构的基本思想：利用一个结构元素（相当于模板）去探测一个图像，看是否能将这个结构元素很好地填放在图像的内部，同时验证填放结构元素的方法是否有效。

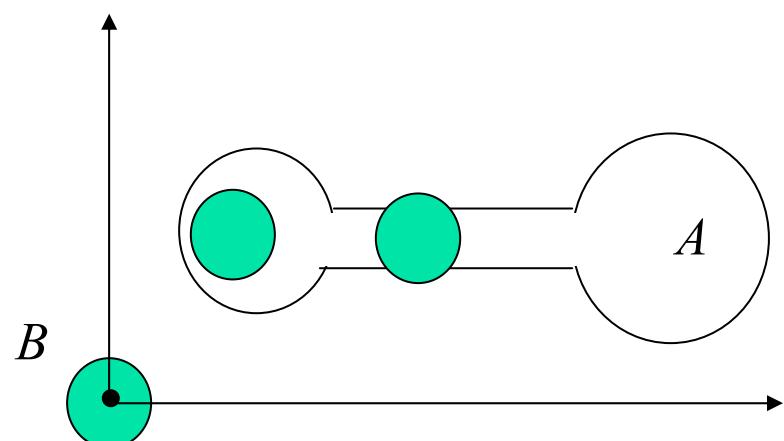
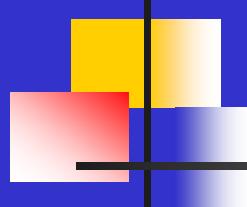


图1 形态学基本运算

通过对图像内适合放入结构元素的位置做标记，就可得到关于图像结构的信息。这些信息与结构元素的尺寸和形状都有关。构造不同的结构元素，便可完成不同的图像分析，得到不同的分析结果。



二、数学形态学基本算法

1、基本概念

•集合关系：设 A 和 B 为 \mathbb{R}^2 的子集， A 为物体区域， B 为某种结构元素，则 B 结构单元对 A 的关系有三类：

- a) B 包含于 A , $B \subset A$
- b) B 击中 (hit) A , $B \cap A \neq \emptyset$
- c) B 击不中 (miss) A , $B \cap A = \emptyset$

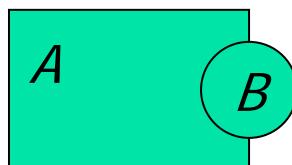
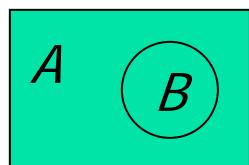
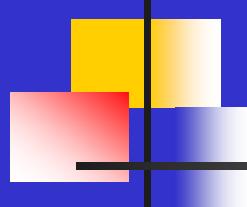


图2 包含、击中和击不中示意图



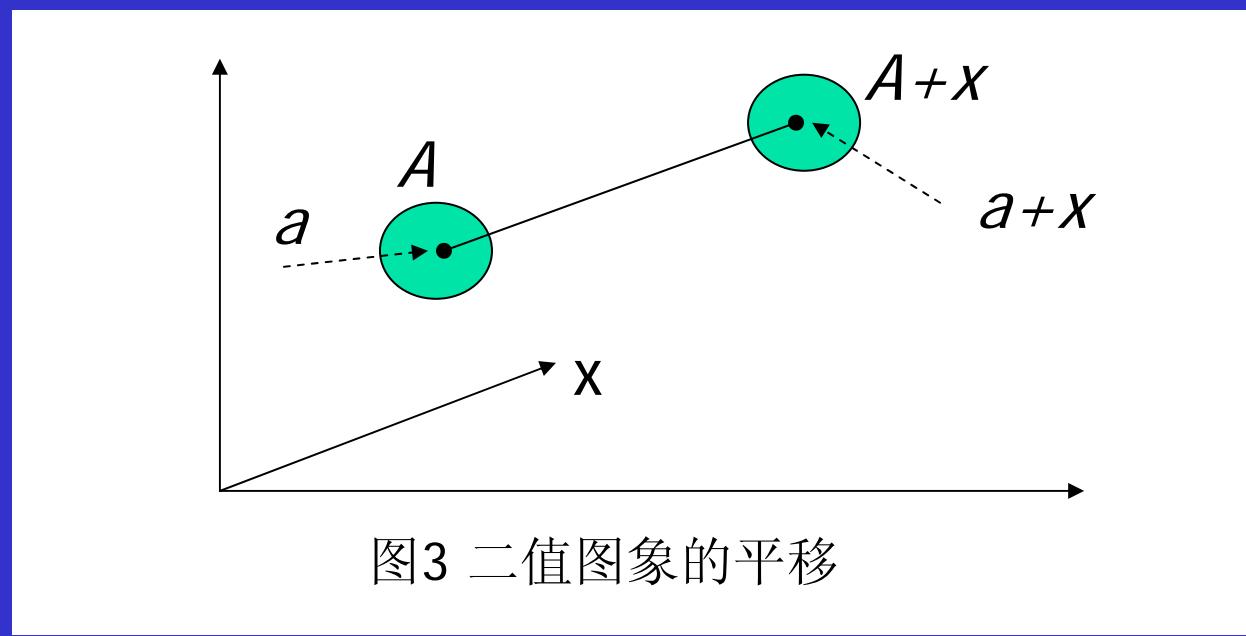
二、数学形态学基本算法

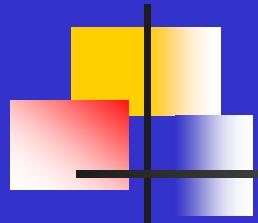
1、基本概念

- 平移：将一个集合 A 平移距离 x 可以表示为 $A+x$ ，其定义

为：

$$A+x = \{a+x \mid a \in A\}$$

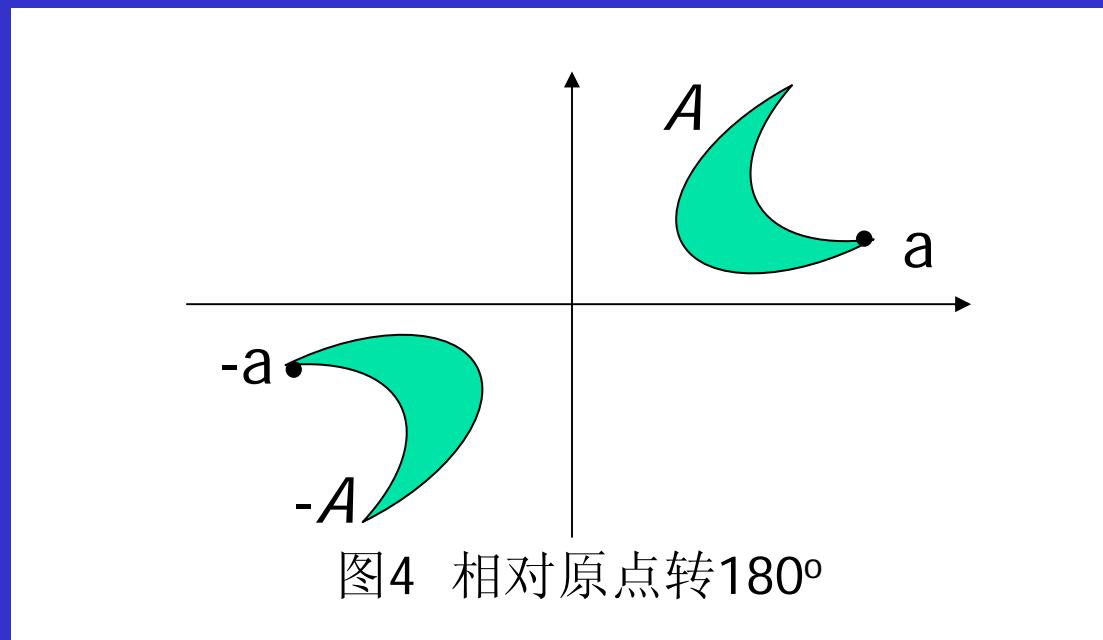




二、数学形态学基本算法

1、基本概念

- 对称集：设有一幅图像 A ，将 A 中所有元素相对原点转 180° ，即令 (x, y) 变成 $(-x, -y)$ ，所得到的新集合称为 A 的对称集，记为 $-A$.



二、数学形态学基本算法

2、腐蚀与膨胀

- 腐蚀：集合 A 被集合 B 腐蚀，表示为 $A \ominus B$ ，数学形式

$$A \ominus B = \{x : B + x \subset A\}$$

$A \ominus B$ 表示将 B 平移 x 但仍包含在 A 内的所有点 x 组成。若把 A 看作输入图像， B 看作模板，则 $A \ominus B$ 由在平移模板的过程中，所有可以添入 A 内部的模板的原点组成。

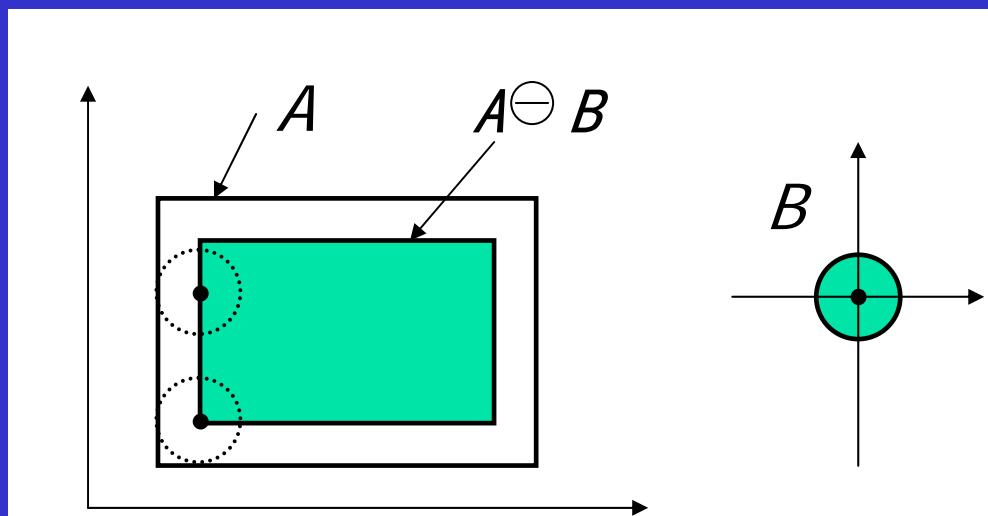
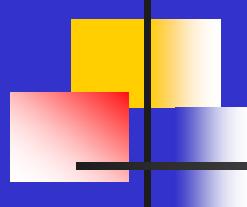


图5 腐蚀类似于收缩



二、数学形态学基本算法

2、腐蚀与膨胀

- 腐蚀

一般,如果原点在结构元素内部,则腐蚀后的图像为输入图像的子集;如果原点不在结构元素的内部,则腐蚀后的图像可能不在输入图像的内部,但输出形状不变.

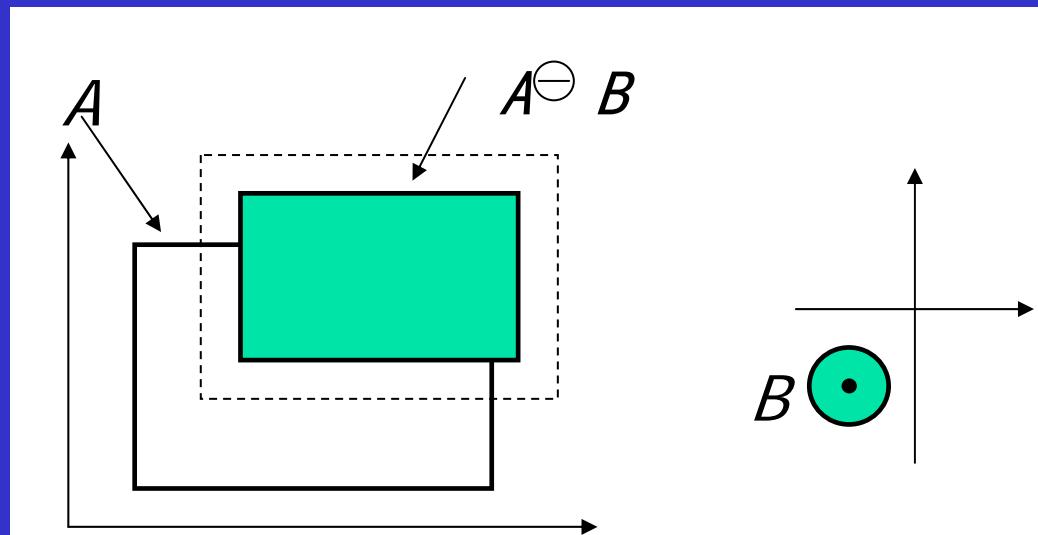
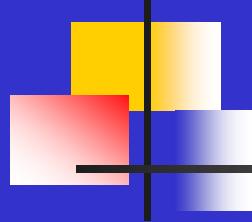
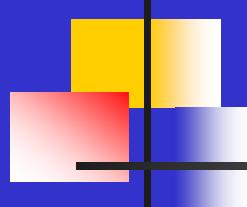


图6 腐蚀不是输入图像的子图像



例 数字图像 S 和结构元素 E , 求腐蚀结果如下:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0_\Delta & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1_\Delta \end{bmatrix} \quad S \ominus E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0_\Delta & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



二、数学形态学基本算法

2、腐蚀与膨胀

- 膨胀：是腐蚀运算的对偶运算，可以通过对补集的腐蚀来定义。 A 被 B 膨胀表示为 $A \oplus B$ ，其定义为：

$$A \oplus B = [A^c \ominus (-B)]^c$$

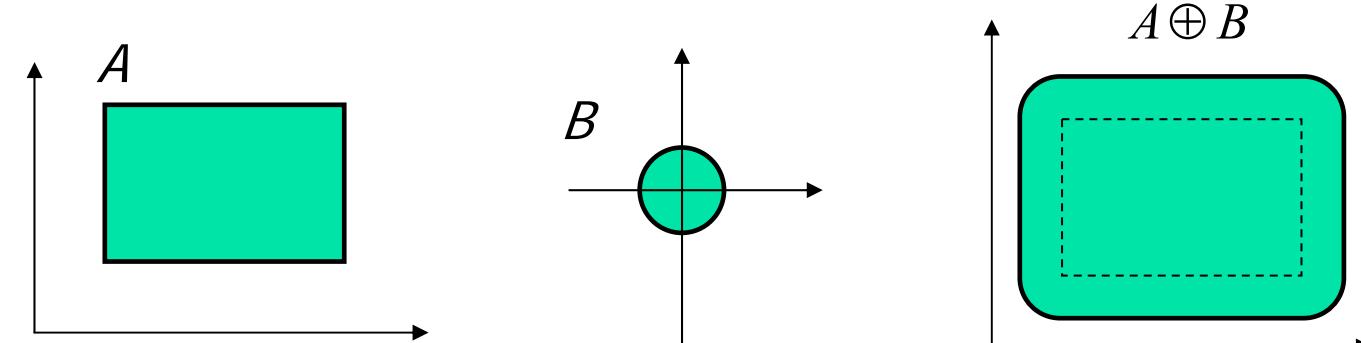
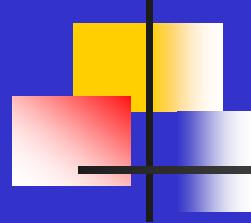


图7 利用圆盘膨胀



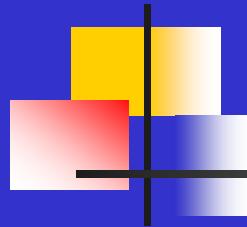
二、数学形态学基本算法

2、腐蚀与膨胀

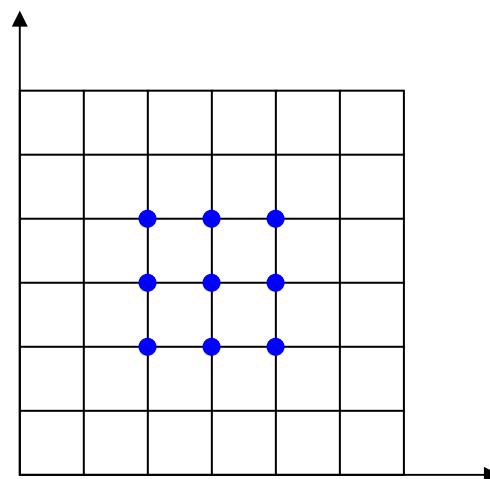
- 膨胀：

膨胀的等效方程：膨胀可以通过相对结构元素的所有点平移输入图像，然后计算其并集得到。

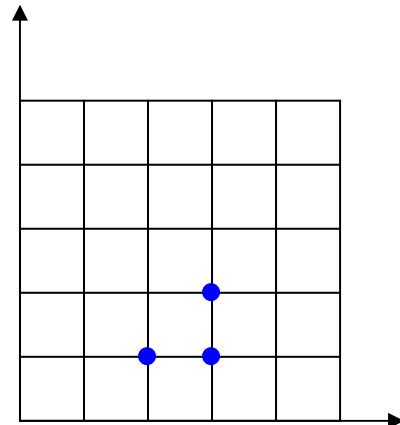
$$A \oplus B = \bigcup \{ A + b : b \in B \}$$



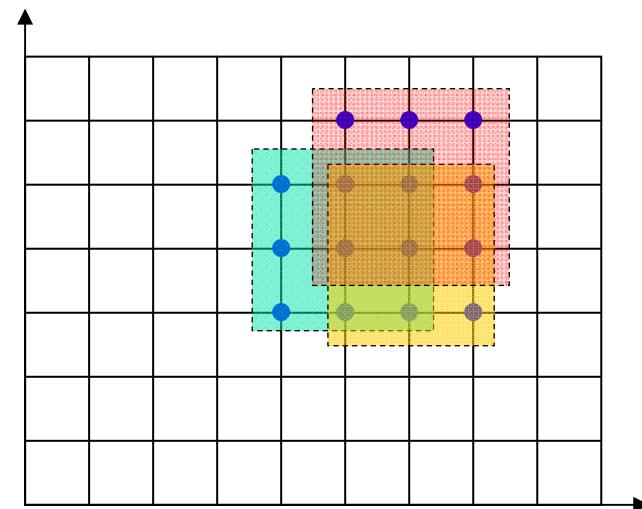
用膨胀的等效方程计算膨胀结果



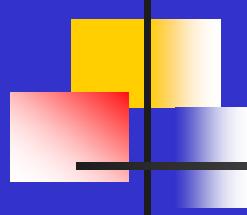
A



B



膨胀结果

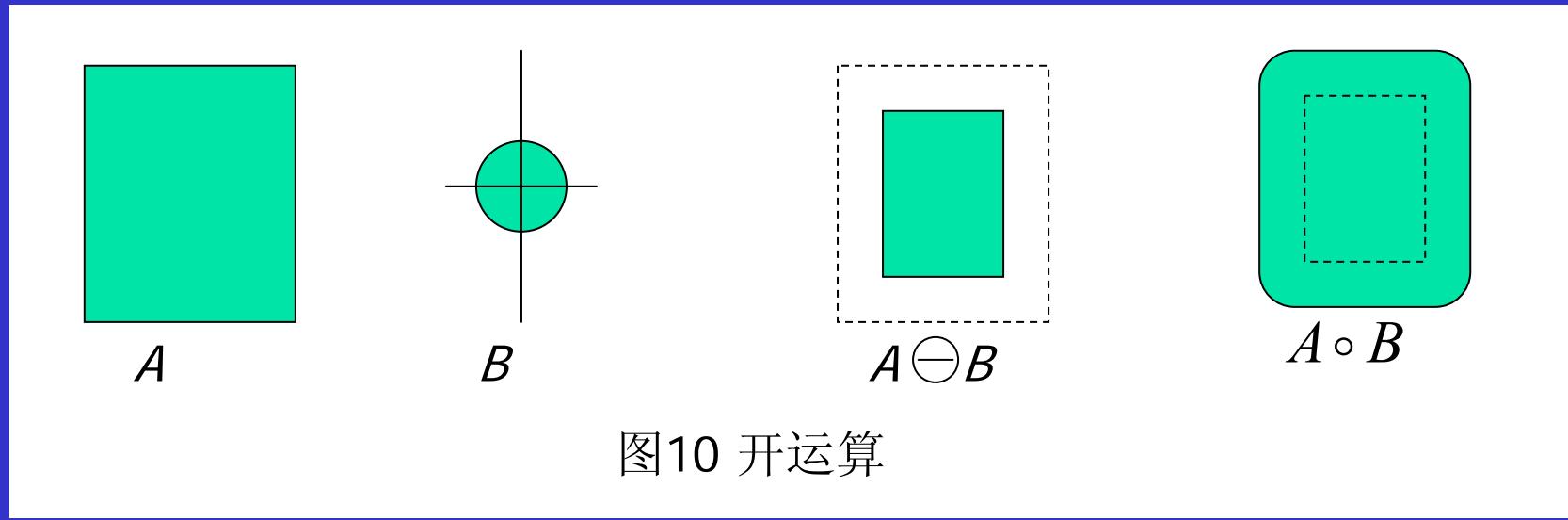


二、数学形态学基本算法

3、开、闭运算

- 开运算：利用图像 B 对图像 A 做开运算，用符号 $A \circ B$ 表示，其定义为：

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$



例：

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0_{\Delta} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1_{\Delta} & 1 \end{bmatrix} \quad S \ominus E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{\Delta} & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(S \ominus E) \oplus E =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{\Delta} & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0_{\Delta} & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0_{\Delta} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S \circ E = (S \ominus E) \oplus E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0_{\Delta} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

二、数学形态学基本算法

3、开、闭运算

- 闭运算：是开运算的对偶运算，定义为先作膨胀然后再作腐蚀。利用 B 对 A 作闭运算表示为 $A \bullet B$ ，其定义为：

$$A \bullet B = [A \oplus (-B)] \ominus (-B)$$

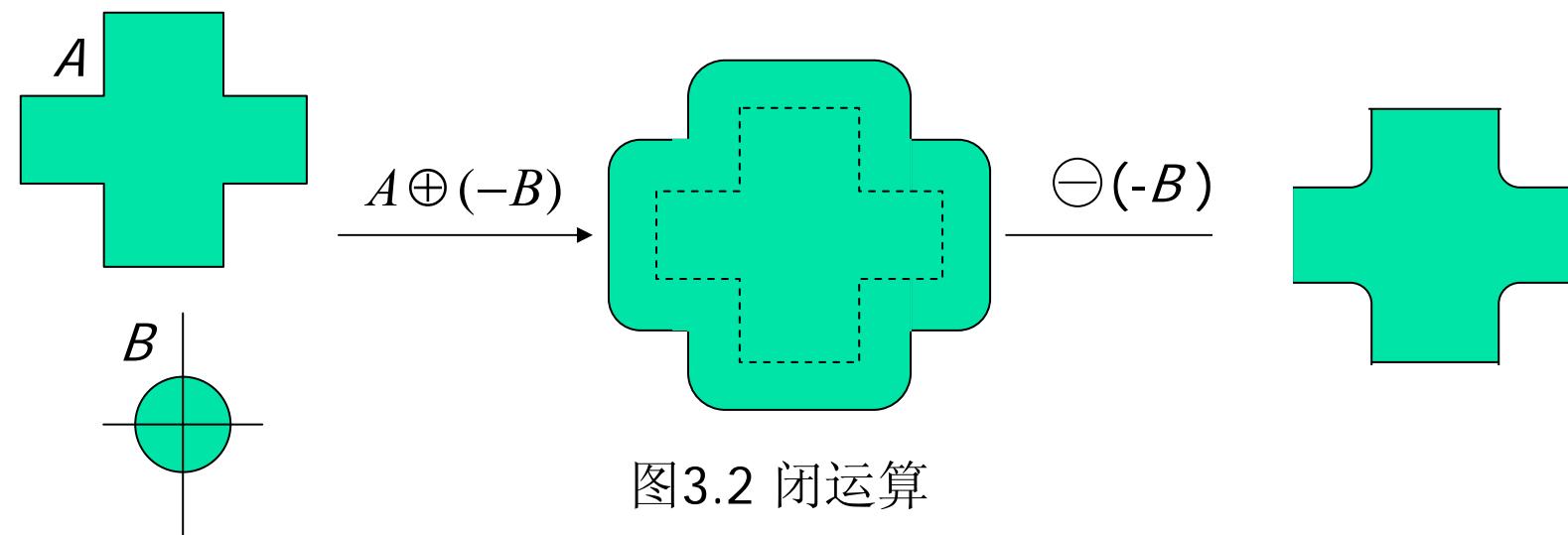
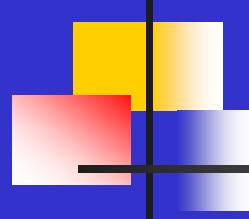


图3.2 闭运算

闭运算实例

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0_{\Delta} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1_{\Delta} & 1 \end{bmatrix} \quad -E = \begin{bmatrix} 1 & 1_{\Delta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S \oplus (-E) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1_{\Delta} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S \bullet E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0_{\Delta} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

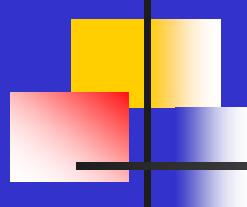


二、数学形态学基本算法

3、开、闭运算

- 开、闭运算的滤波性质：

开运算可以滤掉背景（并）噪声——胡椒状噪声
闭运算可以滤掉前景（差）噪声——沙眼噪声



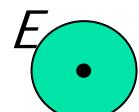
二、数学形态学基本算法

4、击中击不中变换

●**定义：**击中击不中变换需要两个结构基元E和F，这两个基元被作为一个结构元素对B=(E, F)，一个探测图像内部，一个探测图像外部，其定义为：

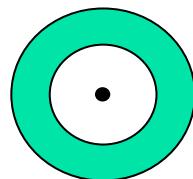
$$A * B = (A \ominus E) \cap (A^C \ominus F)$$

显然 $E \cap F = \emptyset$

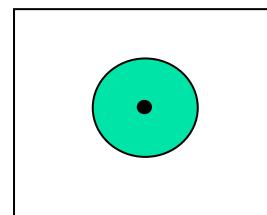


击中结构元素

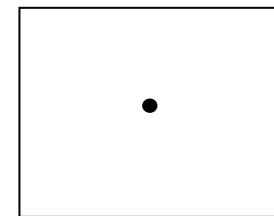
F



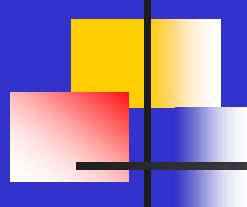
击不中结构元素



输入图像



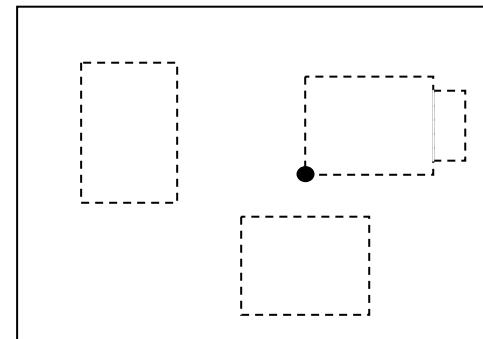
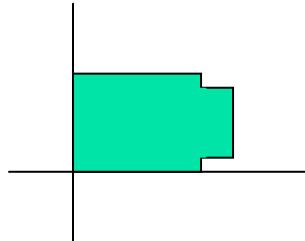
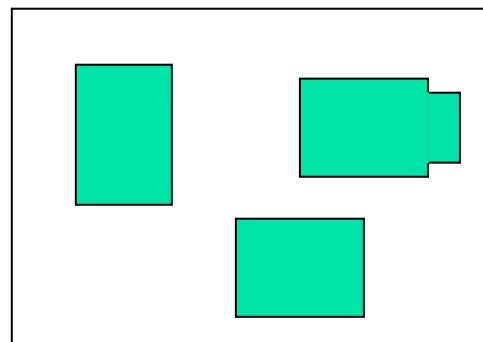
击中击不中输出



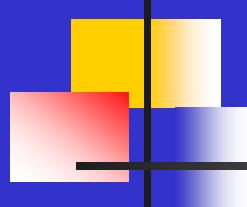
二、数学形态学基本算法

4、击中击不中变换

- 利用击中击不中变换进行物体识别



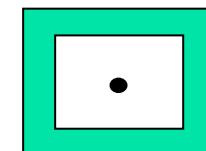
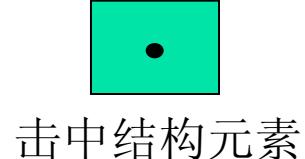
利用与目标相同的结构元素做腐蚀



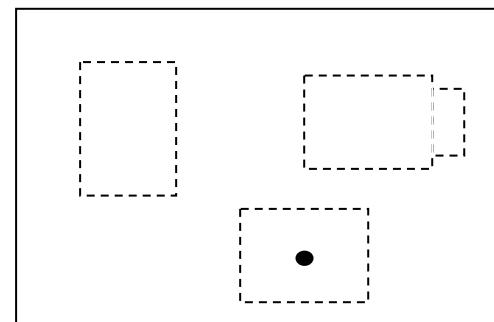
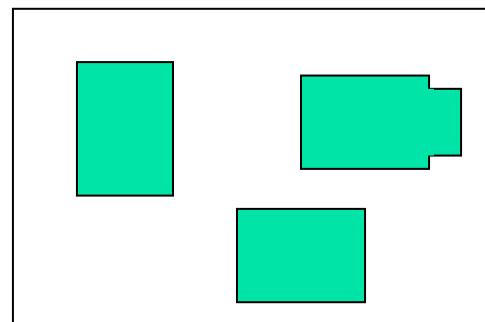
二、数学形态学基本算法

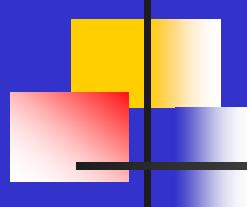
4、击中击不中变换

- 利用击中击不中变换进行物体识别



利用击中击不中
变换识别物体的
过程

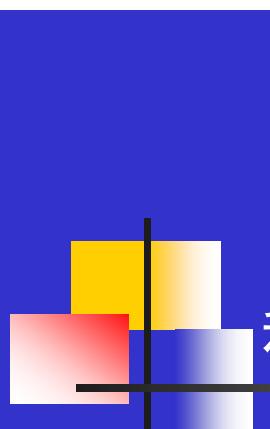




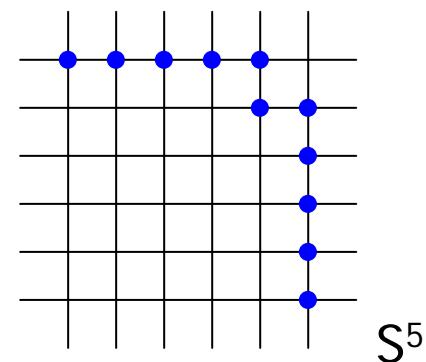
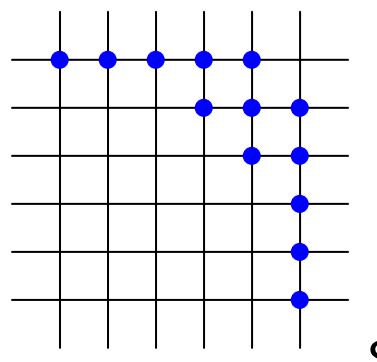
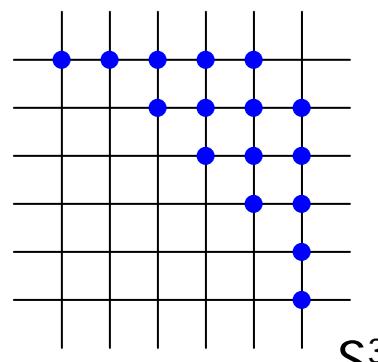
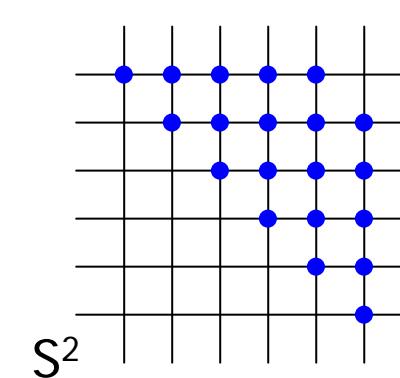
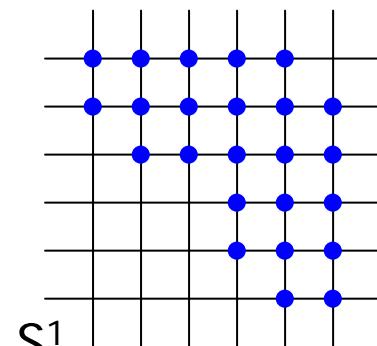
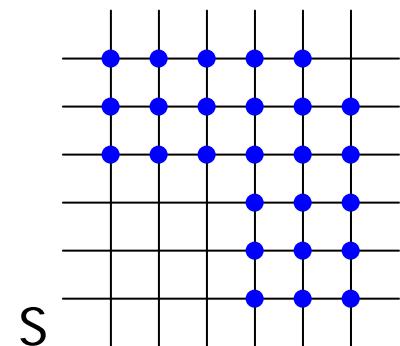
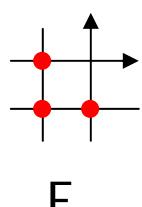
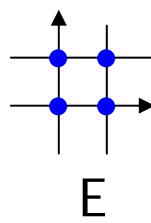
二、数学形态学基本算法

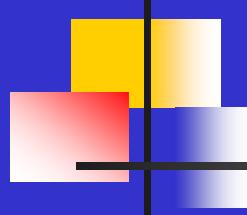
4、击中击不中变换

- 利用击中击不中变换细化



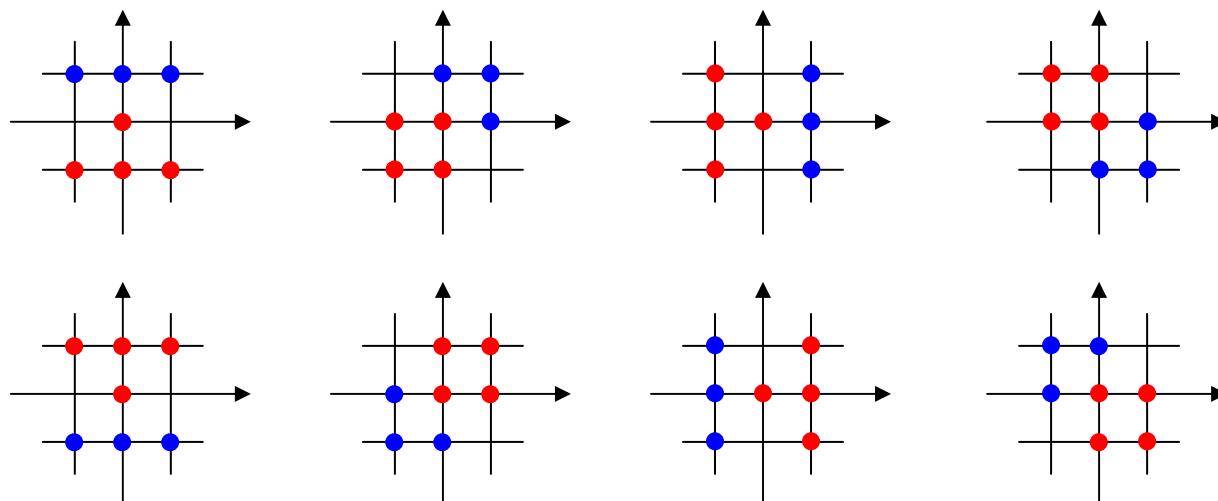
利用一个结构对的顺序细化



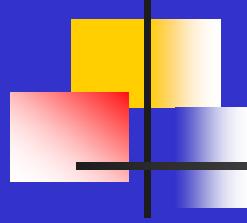


细化中结构元素对的选取

在实际应用中，通常选择一组结构元素对，迭待过程不断在这些结构对中循环，当一个完整的循环结束时，如果所得结果不再变化，则终止迭待过程。例如，下面是用于细化的8个方向结构对



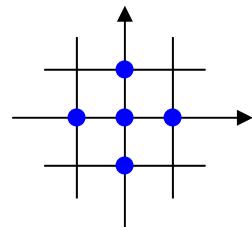
图中 • 表示击中
结构元素E，● 表示击不中结构元
素F。



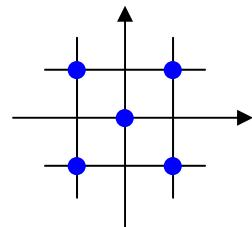
三、二值图像的形态学处理

1、基本概念

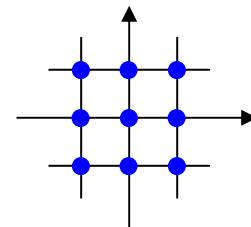
- 强邻接像素：两个像素在竖直方向或水平方向上相邻。
- 弱邻接像素：两个像素在对角方向上相邻



(a) 强邻接像素模板

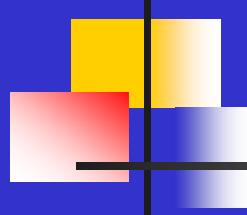


(b) 弱邻接像素模板



(c) 邻接像素模板

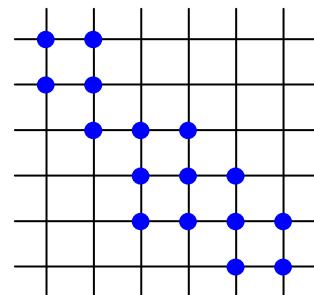
相对原点的各种邻接像素模板



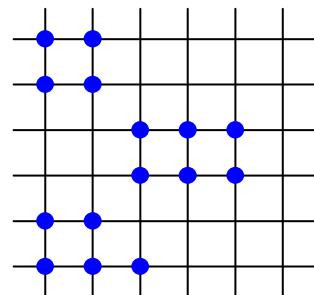
三、二值图像的形态学处理

1、基本概念

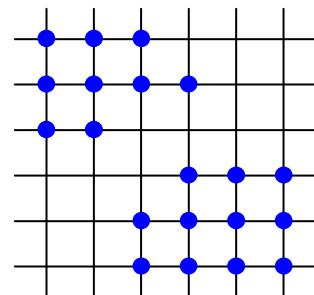
- 强连通：假设 x 和 y 为区域中的任意两个象素，在 x 和 y 之间存在一个象素序列，若这个象素也在这个区域中，并且序列中的象素之间为强邻接的，则这个区域是强连通的。
- 连通：序列中所有的象素之间都具有邻接关系。
- 非连通：任意两个象素之间不存在邻接的象素序列



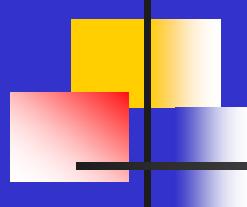
(a) 强连通区域



(b) 连通区域



(c) 非连通区域

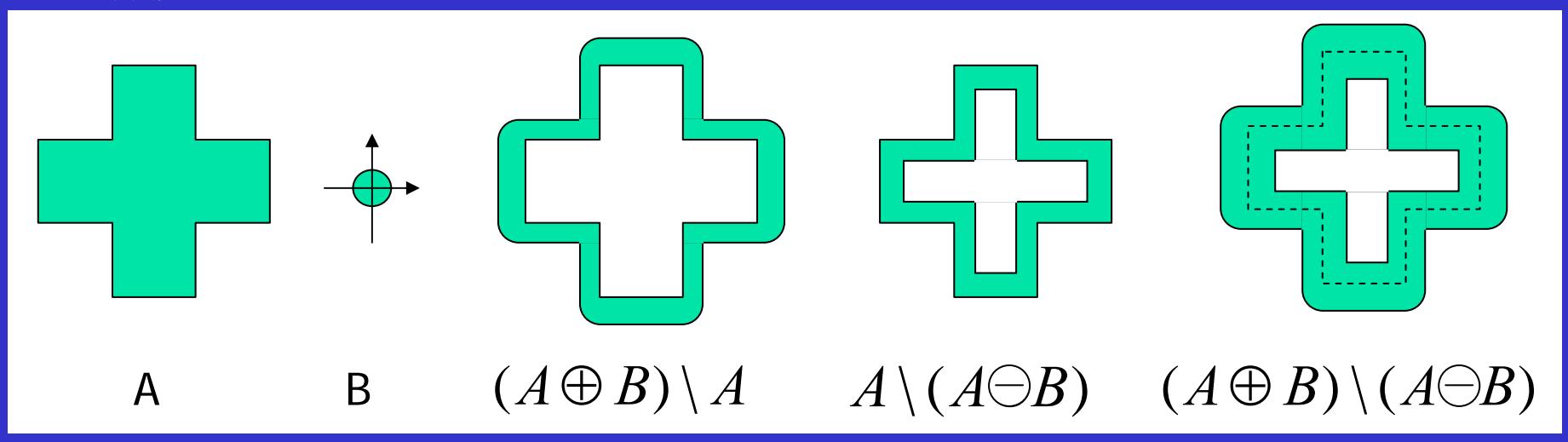


三、二值图像的形态学处理

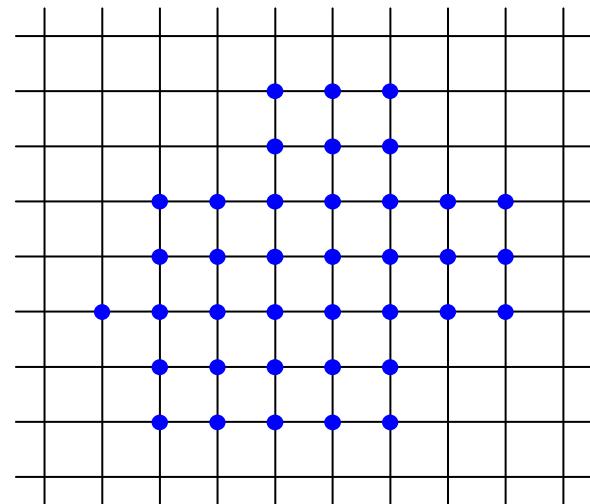
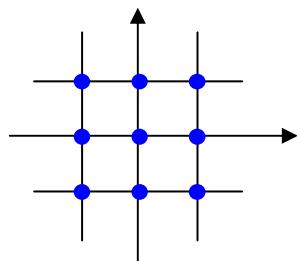
2、边界检测

对于图像A和圆盘B，

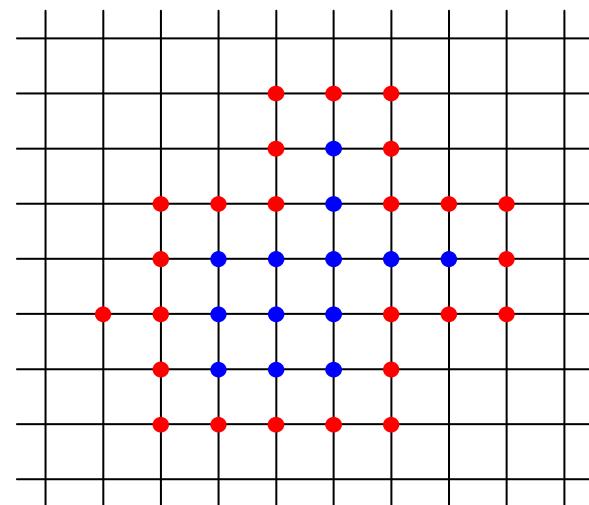
- $(A \oplus B) \setminus A$ 给出外边界
- $A \setminus (A \ominus B)$ 给出内边界
- $(A \oplus B) \setminus (A \ominus B)$ 给出跨骑在实际欧氏边界上的边界，又称形态学梯度。



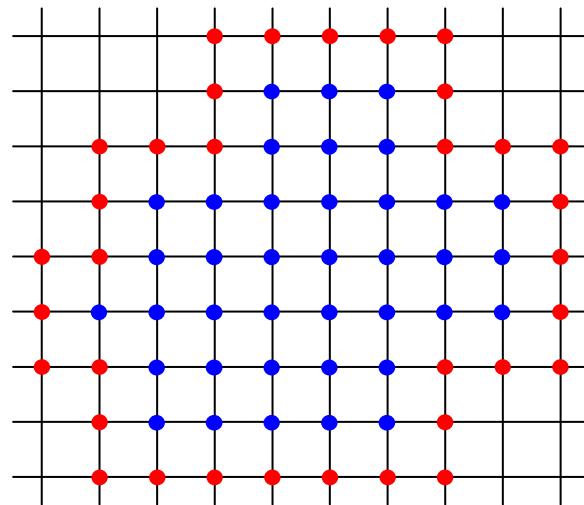
例，用原
点邻接象
素模板得
到强连通
边界。



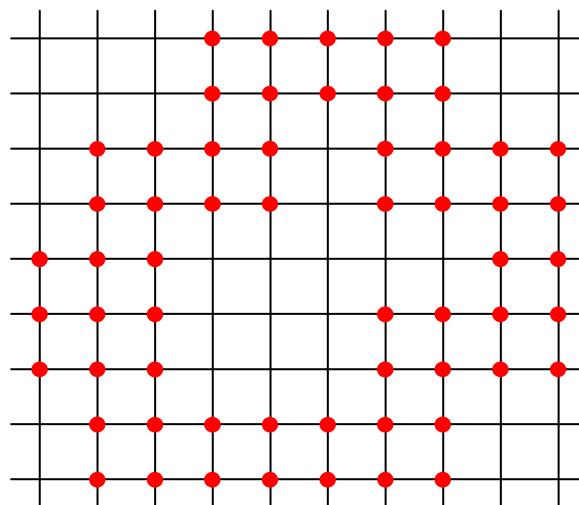
(a) 输入图像



(c) 腐蚀/强连通内边界

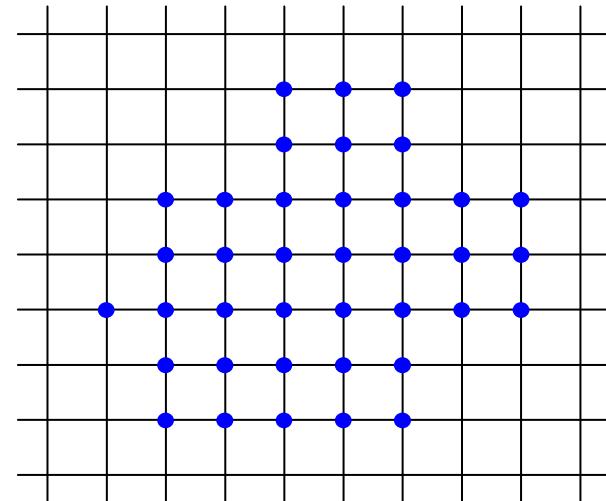


(b) 膨胀/强连通外边界

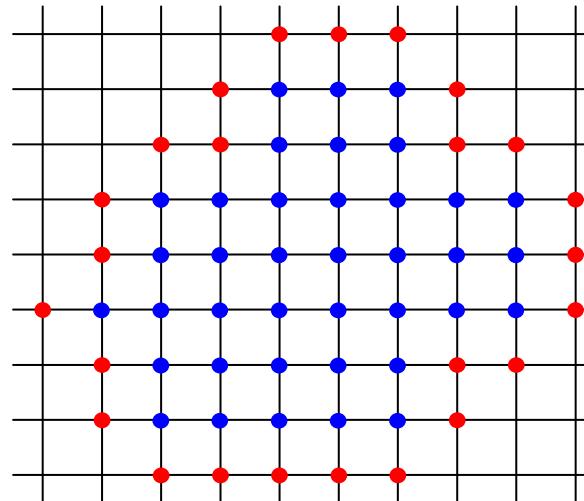


(d) 形态学梯度

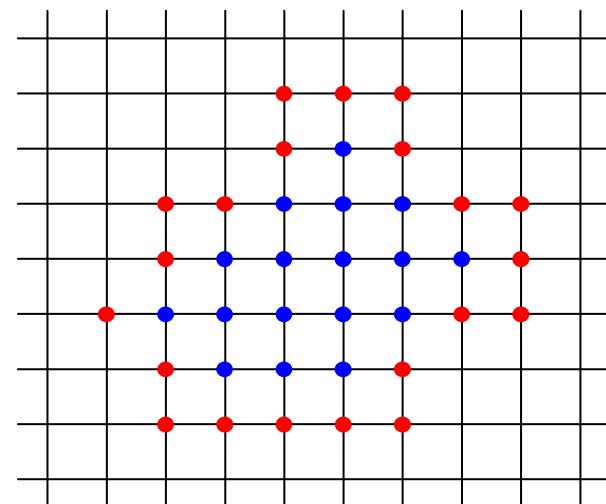
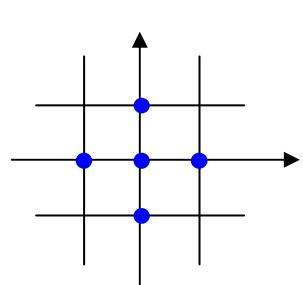
例，用原
点强邻接
象素模板
得到弱连
通边界。



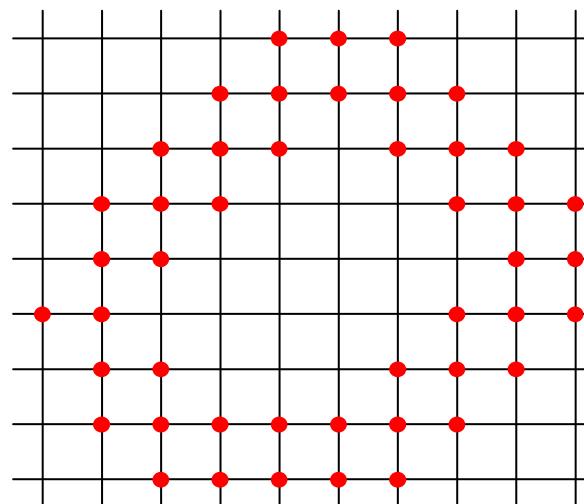
(a) 输入图像



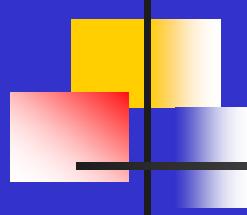
(b) 膨胀/弱连通外边界



(c) 腐蚀/弱连通内边界



(d) 形态学梯度

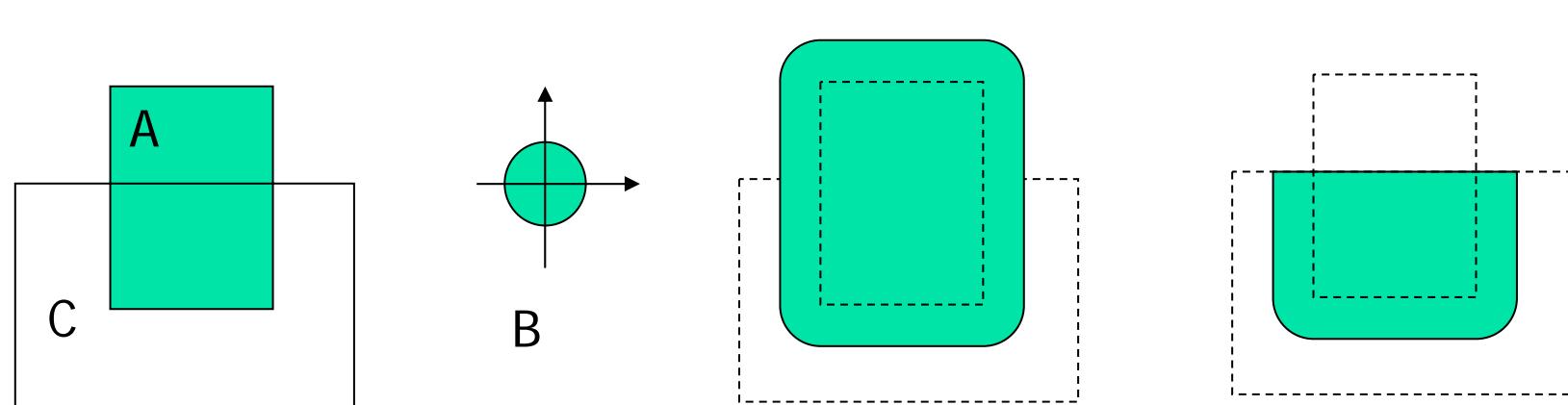


三、二值图像的形态学处理

3、条件膨胀

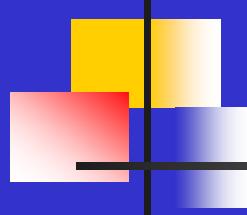
- 定义：假设有输入图像A，结构元素B，集合C，则利用B相对C对A作条件膨胀，可以通过将平移限制在C之内得到，其结果为：

$$A \oplus B : C = \bigcup \{(B + a) \cap C : a \in A\}$$



$$A \oplus B$$

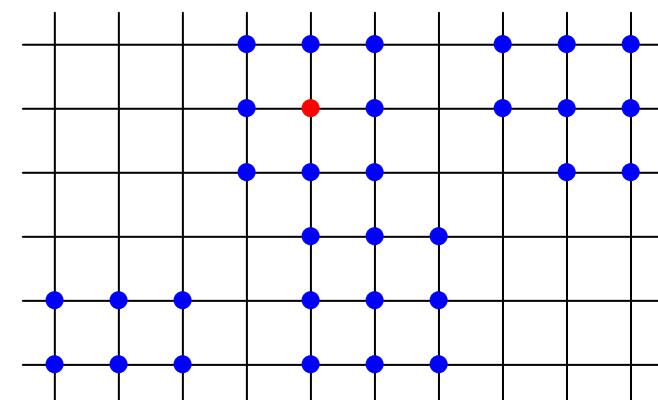
$$A \oplus B : C$$



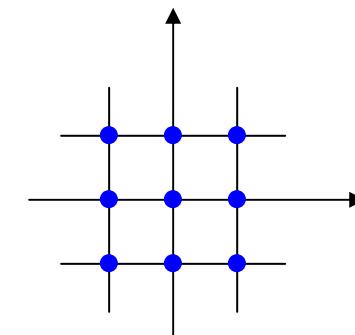
三、二值图像的形态学处理

3、条件膨胀

- 应用——连通成分重建：利用给定的标记进行膨胀，找出二值图像中含有某种标记的连通成分，这个标记可以是一个象素，也可以是一个连通子区域。

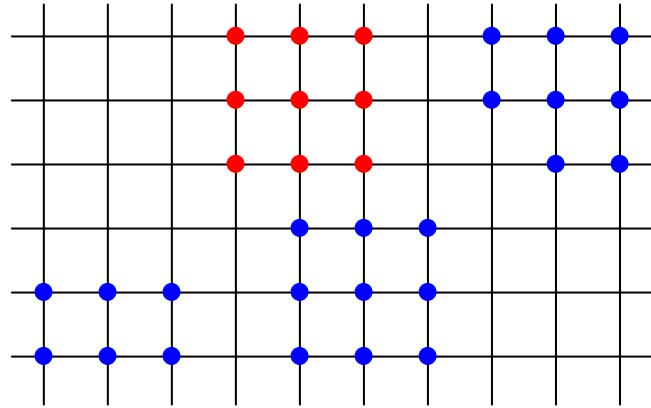


二值输入图象A, •为标记点

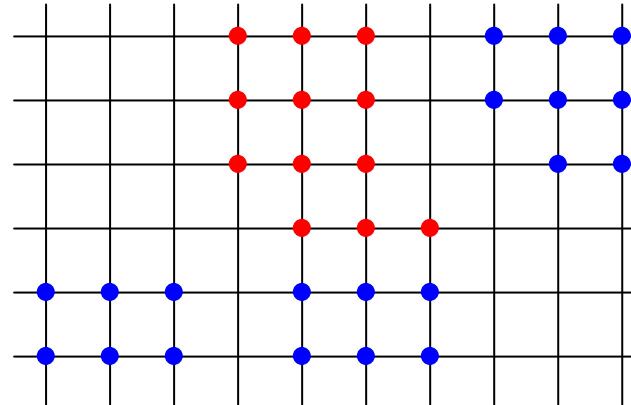


结构元素B

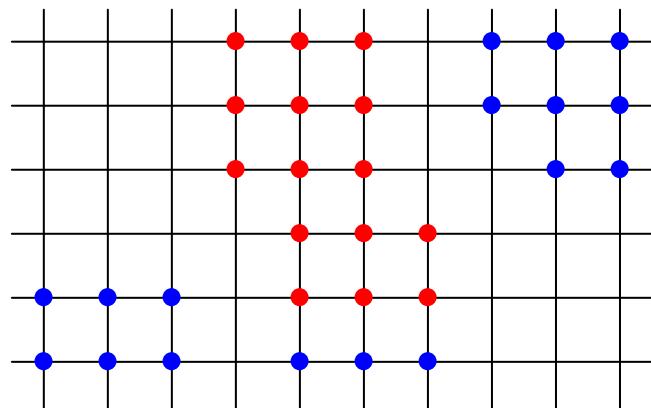
把整个原始图像数据作为条件C，抽取连通成分。



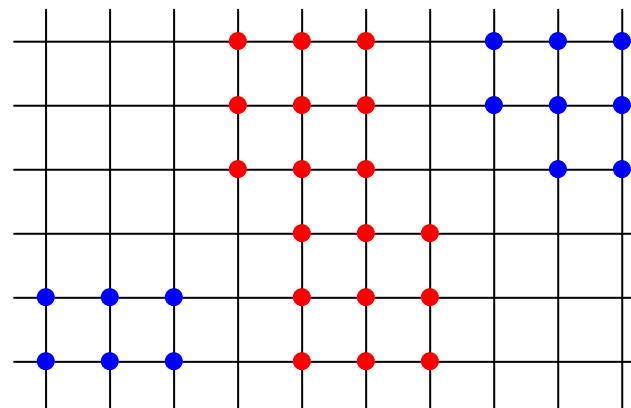
第一步



第二步



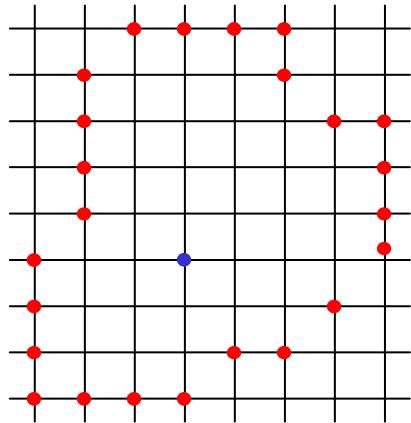
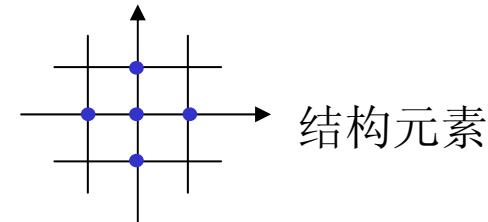
第三步



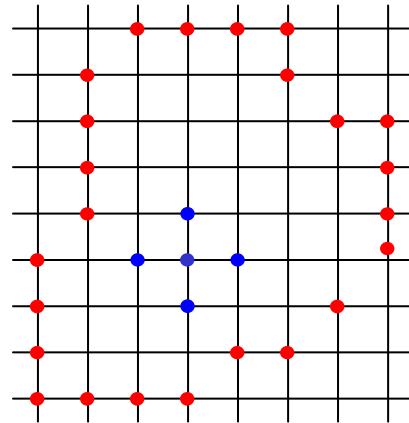
第四步

注：结构元素的选择很重要。

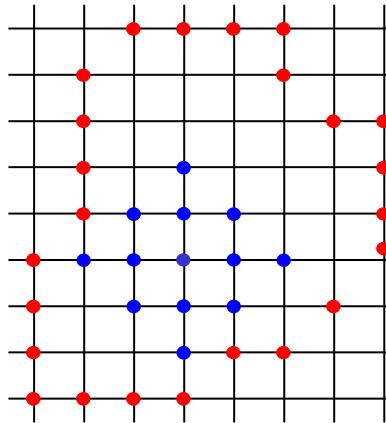
例：填充一个用曲线围成的区域



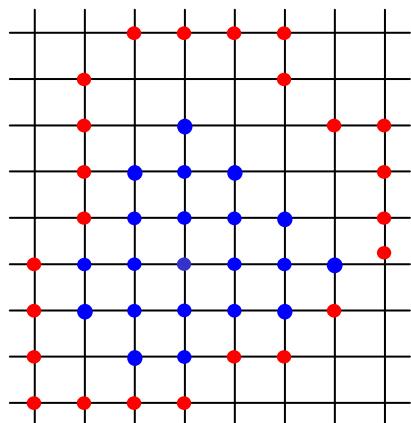
输入图像



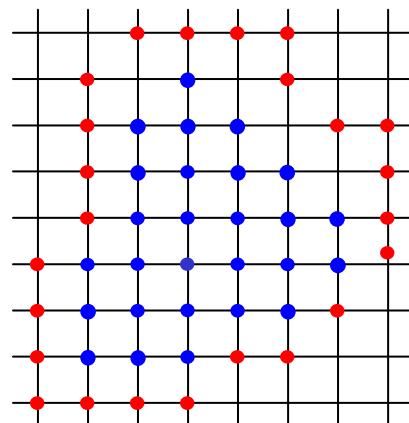
第一步



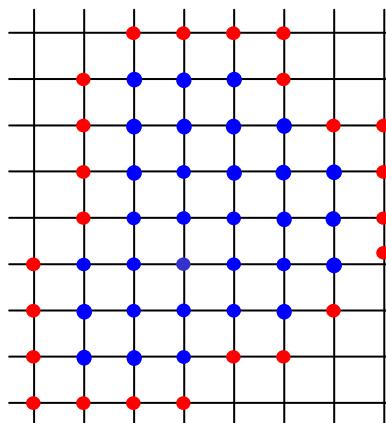
第二步



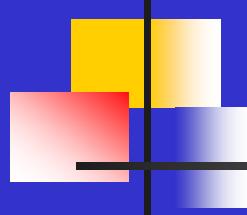
第三步



第四步



第五步

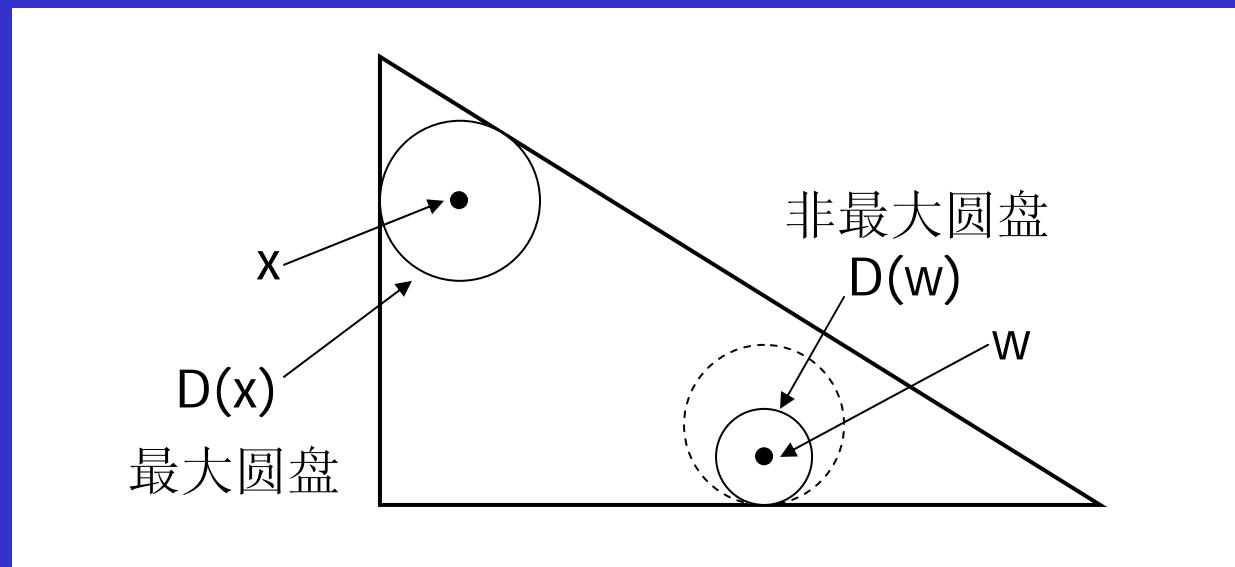


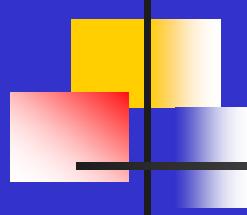
三、二值图像的形态学处理

4、骨架化

- 基本概念：

最大圆盘：对于一个目标 S ， S 内的最大圆盘不是其他任何完全属于 S 的圆盘子集，并且至少有两点与目标边界轮廓相切。



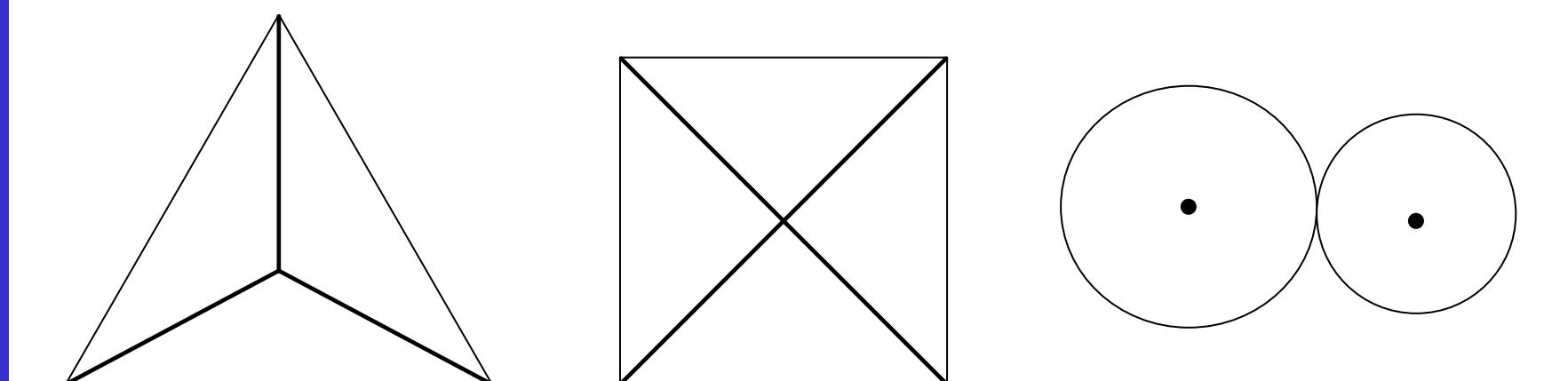


三、二值图像的形态学处理

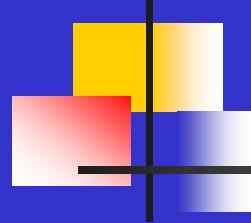
4、骨架化

- 基本概念：

骨架：所有最大圆盘的圆心构成了图像的骨架。



最大圆盘定义的骨架

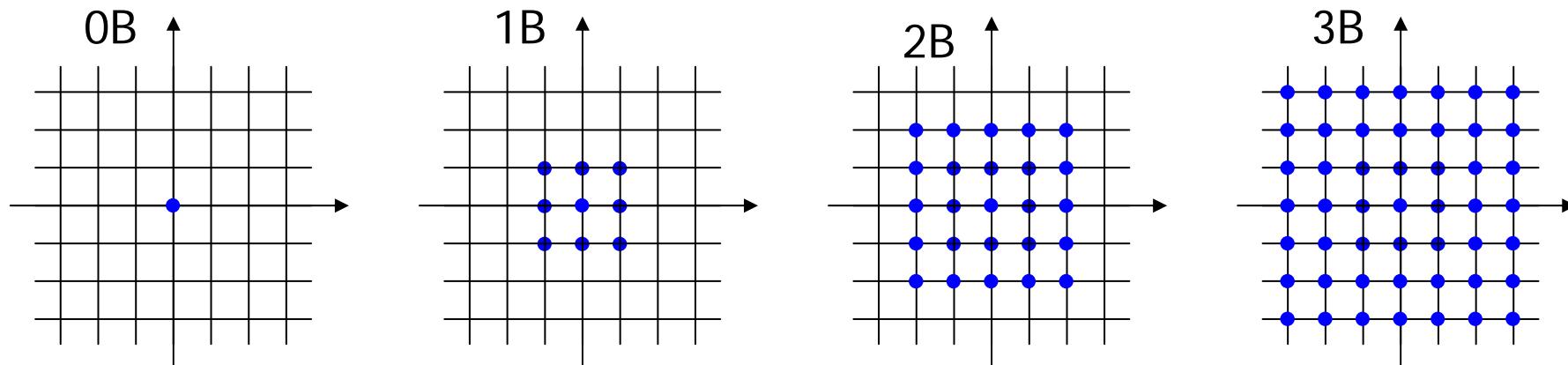


三、二值图像的形态学处理

4、骨架化

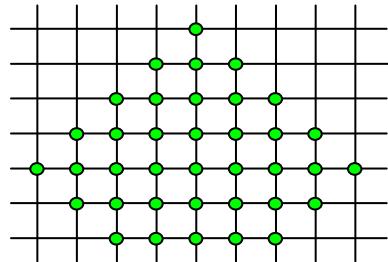
- 数字情况下圆盘的选择：令B为一种结构元素，最大圆盘可表示为0B, 1B, ..., nB。其中

$$nB = \underbrace{B \oplus B \oplus \cdots \oplus B}_{n \text{次}}$$

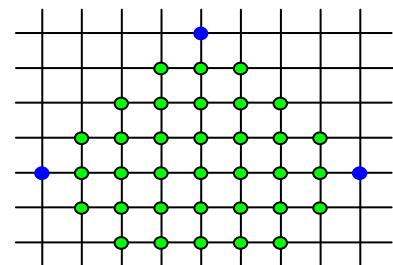


用邻接象素模板作结构元素时的数字圆盘

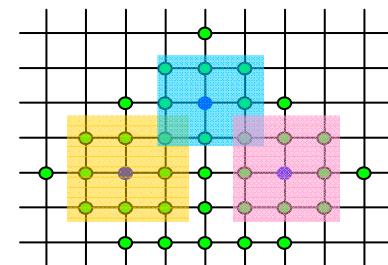
输入图像



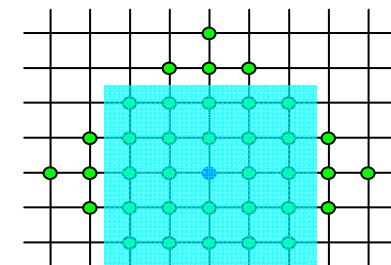
$n=0$



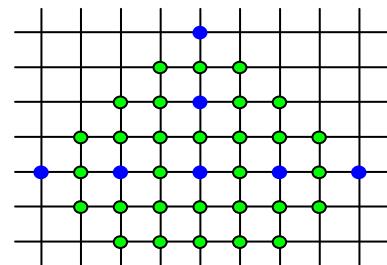
$n=1$



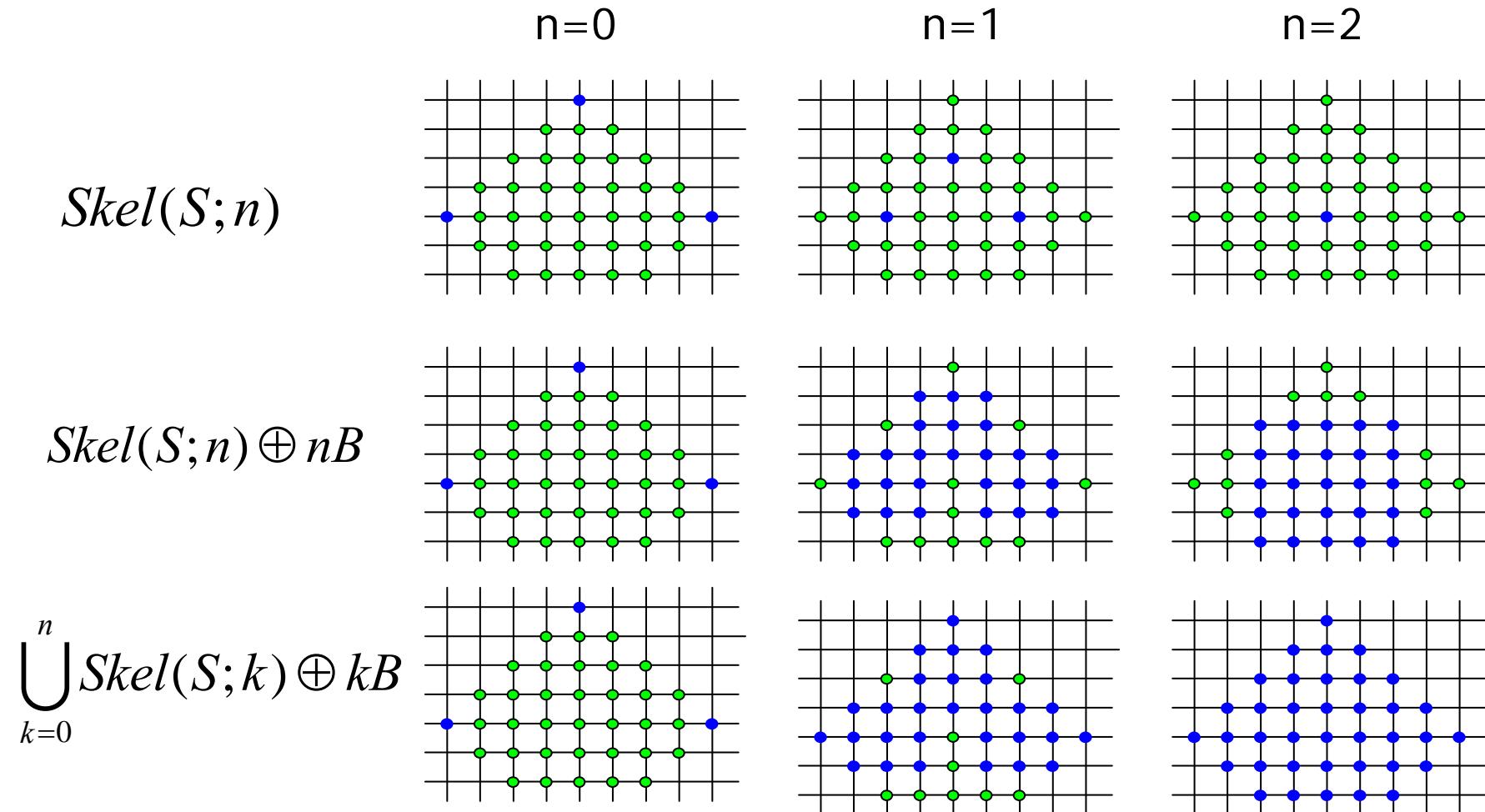
$n=2$

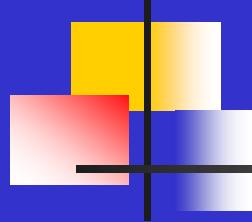


最终骨架



利用骨架子集进行数据重建的过程

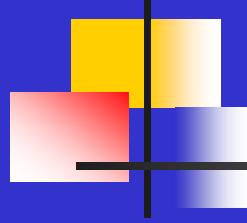




三、二值图像的形态学处理

4、骨架化

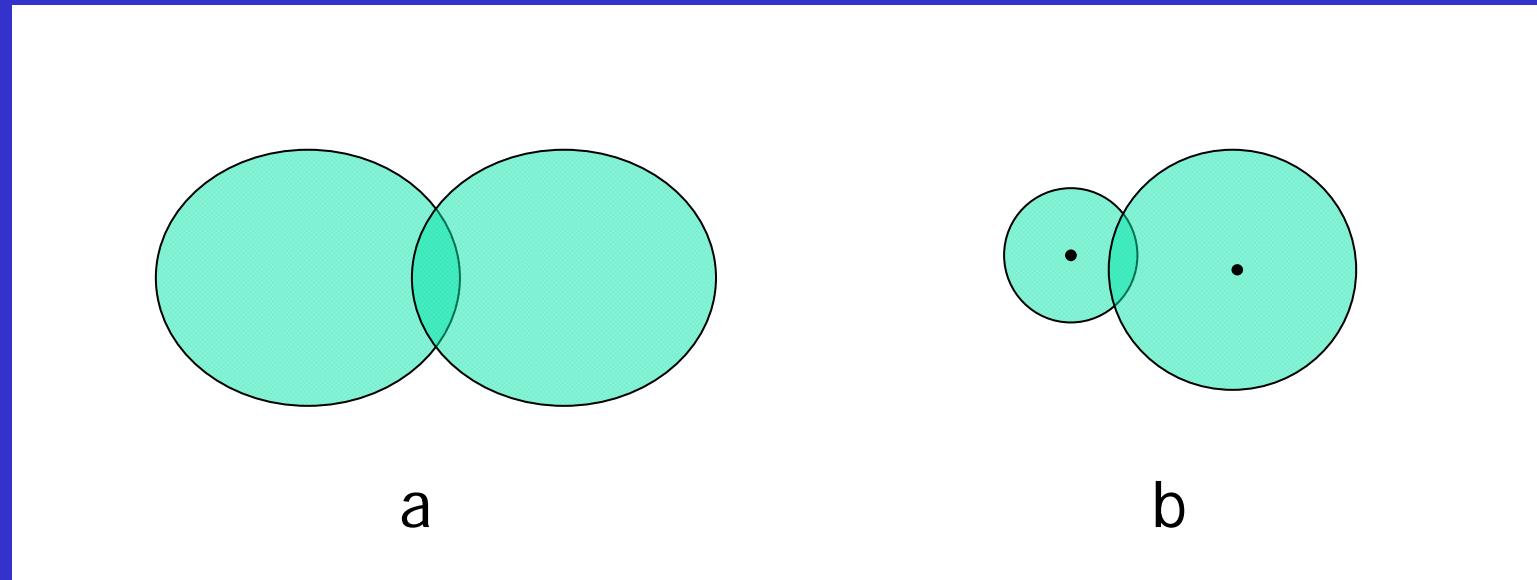
- 数字骨架的应用：数据压缩（有损或无损）、字符识别

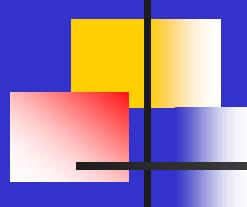


三、二值图像的形态学处理

5、流域分割方法

- 问题：分割下面两个互相重叠的球状物体



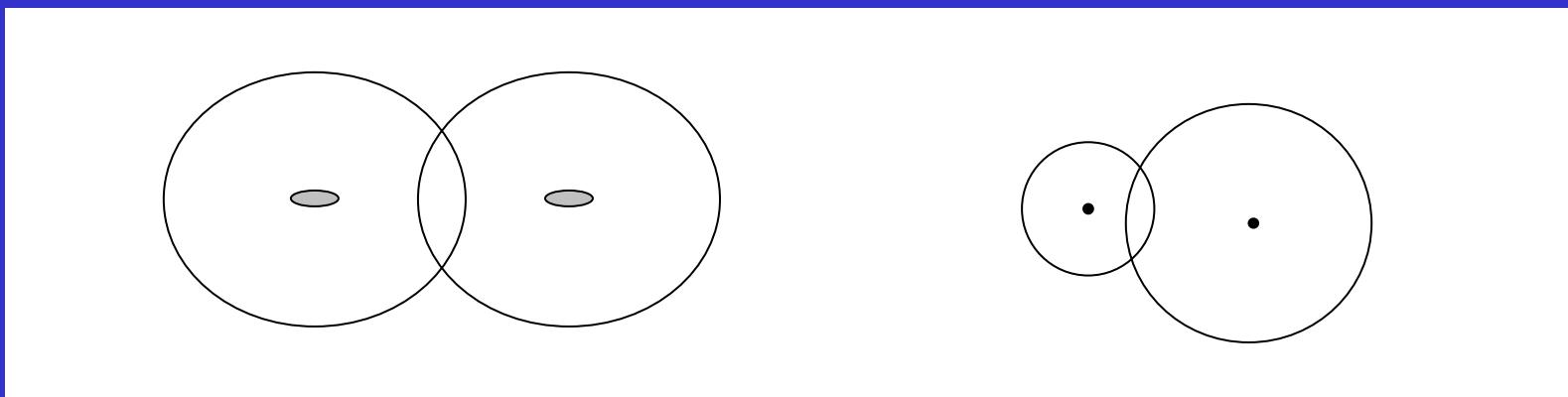


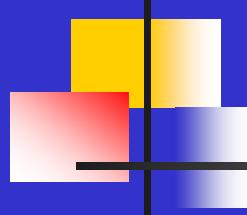
三、二值图像的形态学处理

5、流域分割方法

- 基本概念

极限腐蚀：对于给定图象A，用结构元素B对其进行腐蚀，在腐蚀过程中，不连通的区域不断产生，某些区域又不断消失，一个连通成分在消失前的最后一步，称为最终连通成分。所有最终连通成分的并就是相对B的极限腐蚀，用 $Ult(A)$ 来表示。



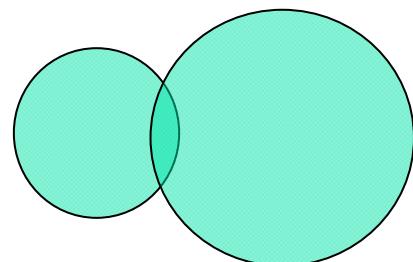


三、二值图像的形态学处理

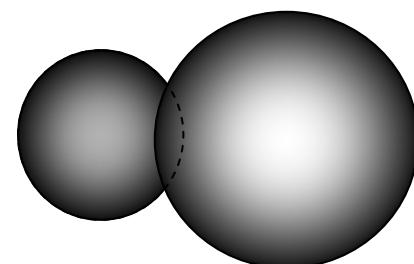
5、流域分割方法

- 基本概念

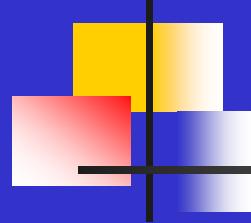
距离函数：对于 A 内给定一点 x ，距离函数 $dist(x)$ 为从 x 到 A 的补集的距离。



输入图象



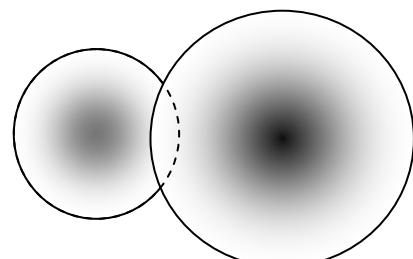
距离函数图



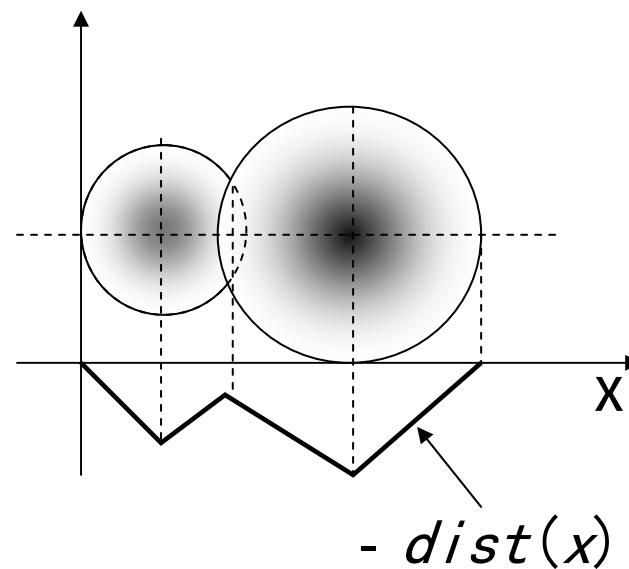
三、二值图像的形态学处理

5、流域分割方法

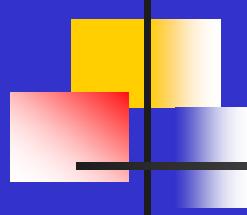
- 流域分割原理



距离函数反相图- $dist(x)$



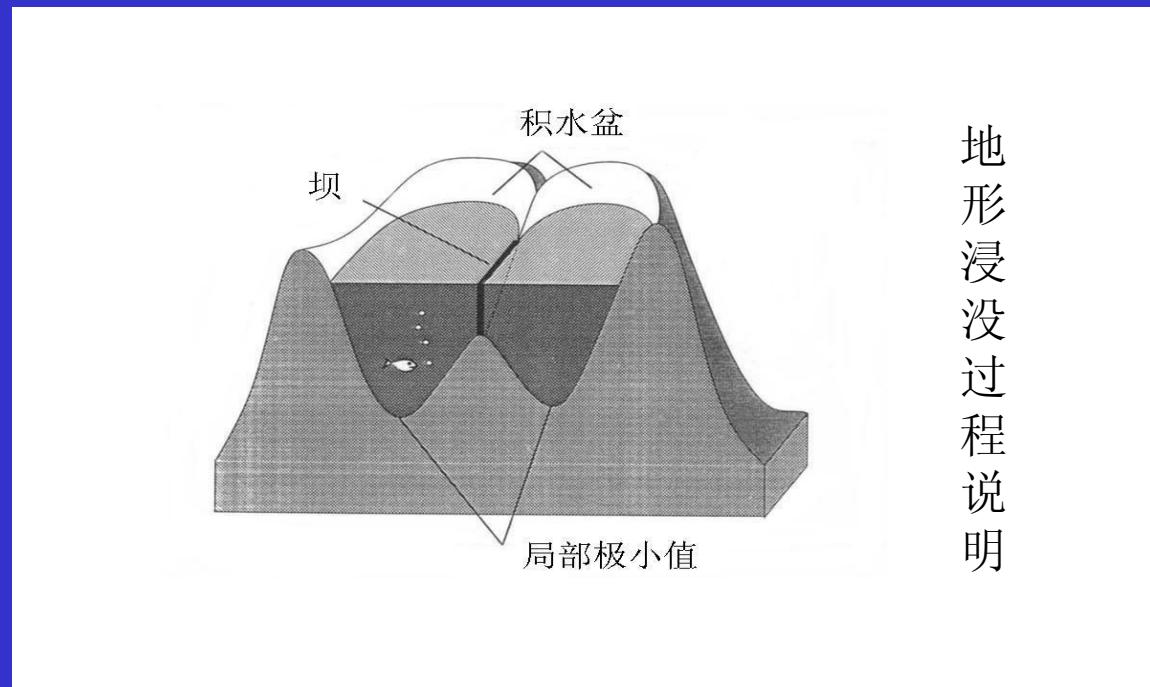
相对通过
圆盘水平
线做出的
 $-dist(x)$
图形

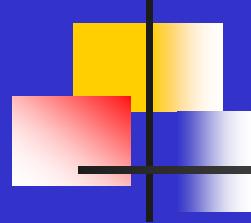


三、二值图像的形态学处理

5、流域分割方法

- 流域分割原理





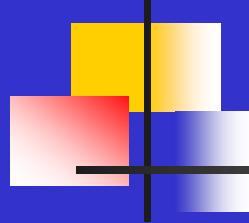
三、二值图像的形态学处理

5、流域分割方法

- 实现

- a) 对图像做极限腐蚀，生成距离函数反相图 - $dist(x)$ ，记下极限腐蚀位置

- b) 水从最深处开始上涨，给每个新出现的积水盆一个新的标记，水面上涨过程中不同积水盆相接时，筑起一道坝最终的坝就是分割线



三、二值图像的形态学处理

6、颗粒分析

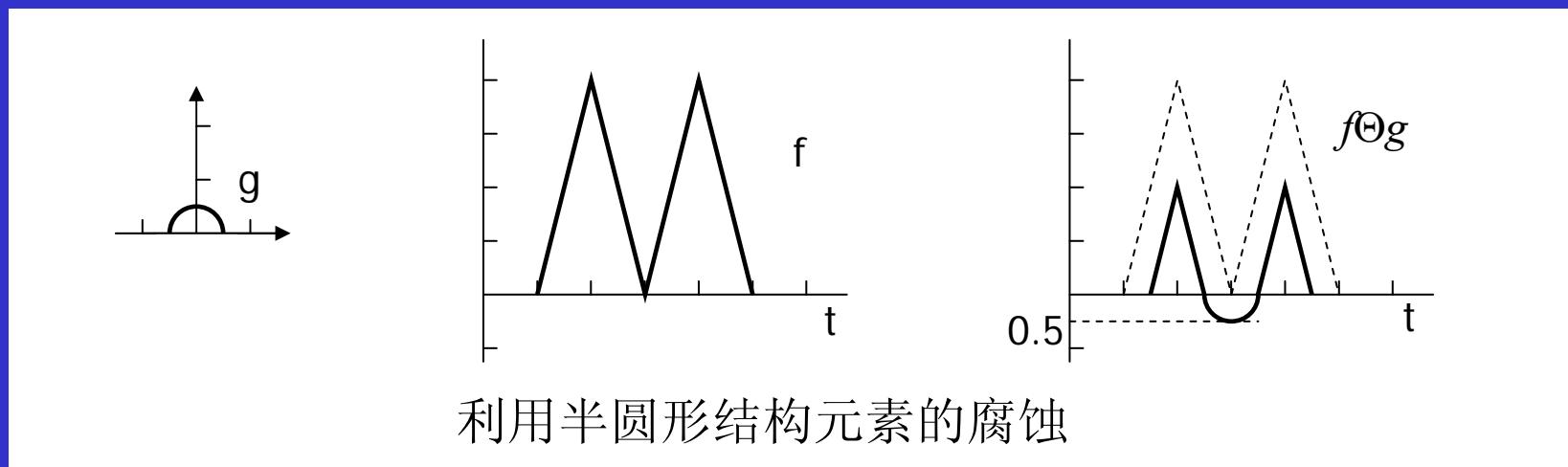
- 离散粒度分布
- 局部颗粒分析

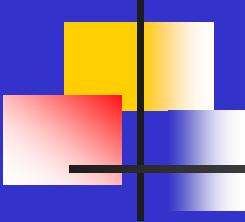
四、灰值形态学

1、灰值腐蚀

- g 在 f 的下方：对于定义域内任意一点 x ，都有 $g(x) \leq f(x)$ ，则称 g 在 f 的下方，记为 $g \ll f$ 。
- 利用结构元素 g 对信号 f 的腐蚀定义为：

$$(f \Theta g)(x) = \max \{y : g_x + y \ll f\}$$





四、灰值形态学

1、灰值腐蚀

- 腐蚀的等价定义：

$$(f \Theta g)(x) = \min\{f(z) - g(z) : z \in D[g_x]\}$$

推导：假设在点x处，f被g腐蚀的值为y，则

$$y + g(z) \leq f(z)$$

$$y \leq f(z) - g(z)$$

$$\min(f(z) - g(z)) \leq f(z) - g(z)$$

$$y = \min(f(z) - g(z))$$

例1

$$f = (*_{\Delta} \ * \ 0 \ 2 \ 1 \ 5 \ 9 \ 6 \ 1 \ 0)$$

$$g = (5_{\Delta} \ 5 \ 4)$$

$$(f \Theta g)(2) = \min\{0 - 5, 2 - 5, 1 - 4\} = -5$$

$$f \Theta g = (*_{\Delta} \ * \ -5 \ -4 \ -4 \ 0 \ -3 \ -4)$$

例2：

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3_{\Delta} & 4 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} * & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ * & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 \\ * & 0 & 6 & 7 & 2 & 1 \\ * & 1 & 1 & 6 & 1 & * \\ * & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ *_{\Delta} & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$f \Theta g = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & -2 & -1 & -2 & -3 & * \\ * & -3 & 2 & -2 & -3 & * \\ * & -3 & -2 & -3 & * & * \\ * & -4 & -3 & -2 & * & * \\ *_{\Delta} & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

四、灰值形态学

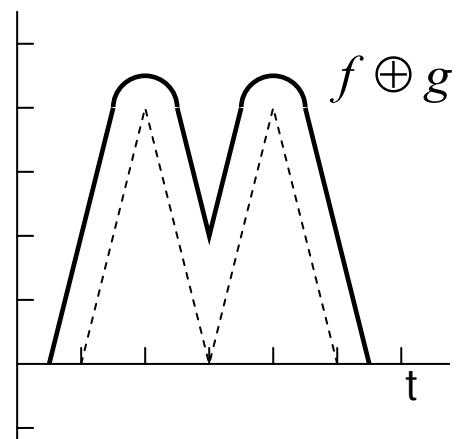
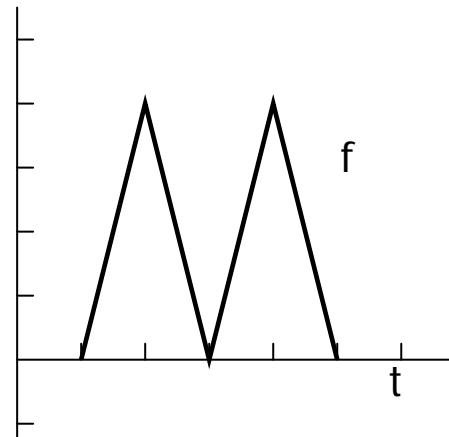
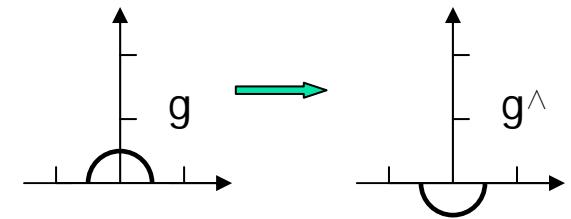
2、灰值膨胀

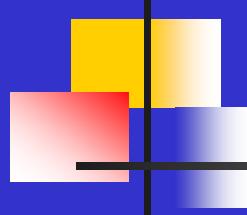
- 定义： f 被 g 膨胀可逐点地定义为：

$$(f \oplus g)(x) = \min\{y: (g^\Delta)_x + y \gg f\}$$

- 等价定义为：

$$f \oplus g = \vee\{f_x + g(x): x \in D[g]\}$$





四、灰值形态学

2、灰值膨胀

- 计算过程:

- 1) 对结构元素g的定义域D[g]中的每一点x将信号f平移x;
- 2) 再对平移信号的值加上g(x);
- 3) 对所有这些信号逐点取最大值。

例1: $f = (7 \ 9 \ 8 \ 3_{\Delta} \ 8 \ 9 \ 9)$ $g = (-3 \ 0_{\Delta} \ -3)$

$$f_{-1} - 3 = (4 \ 6 \ 5 \ 0 \ 5_{\Delta} \ 6 \ 6 \ * \ *)$$

$$f_0 + 0 = (* \ 7 \ 9 \ 8 \ 3_{\Delta} \ 8 \ 9 \ 9 \ *)$$

$$f_{+1} - 3 = (* \ * \ 4 \ 6 \ 5_{\Delta} \ 0 \ 5 \ 6 \ 6)$$

$$f \oplus g = (4 \ 7 \ 9 \ 8 \ 5_{\Delta} \ 8 \ 9 \ 9 \ 6) \leftarrow \text{注: 定义域扩展了}$$

例2:

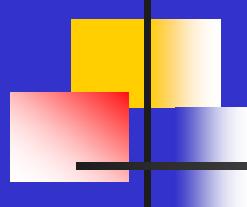
$$g = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3_{\Delta} & 4 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} * & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ * & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 \\ * & 0 & 6 & 7 & 2 & 1 \\ * & 1 & 1 & 6 & 1 & * \\ * & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ *_{\Delta} & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$f_{0,1} + 0 = \begin{bmatrix} * & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ * & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 \\ * & 0 & 6 & 7 & 2 & 1 \\ * & 1 & 1 & 6 & 1 & * \\ * & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$f_{0,0} + 3 = \begin{bmatrix} * & 3 & 5 & 5 & 5 & 4 \\ * & 4 & 5 & 9 & 5 & 4 \\ * & 3 & 9 & 10 & 5 & 4 \\ * & 4 & 4 & 9 & 4 & * \\ * & 4 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ *_{\Delta} & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$f \oplus g = \begin{bmatrix} * & 0 & 3 & 5 & 5 & 5 & 4 \\ * & 3 & 5 & 6 & 9 & 6 & 5 \\ * & 4 & 6 & 9 & 10 & 6 & 5 \\ * & 3 & 9 & 10 & 11 & 6 & 5 \\ * & 4 & 5 & 9 & 10 & 5 & 4 \\ * & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 5 \\ *_{\Delta} & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$



四、灰值形态学

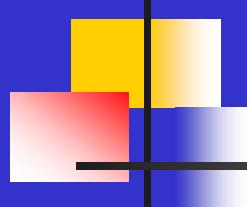
3、灰值开、闭运算

- 灰值开运算

$$f \circ g = (f \Theta g) \oplus g$$

- 灰值闭运算

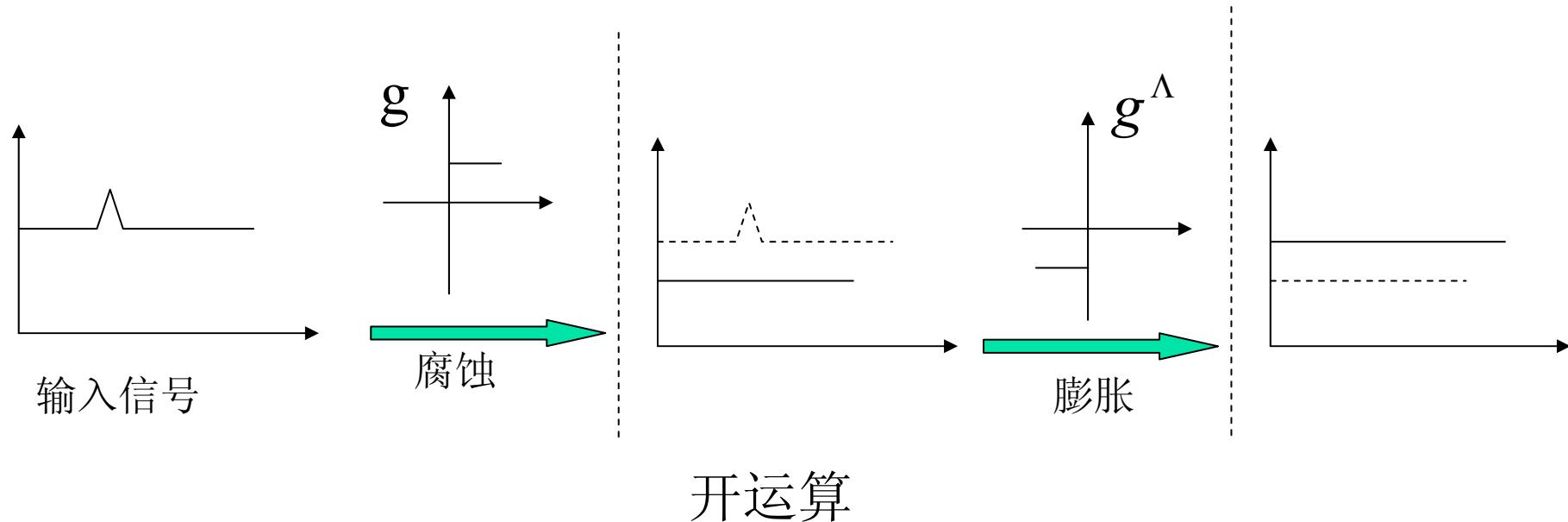
$$f \bullet g = (f \oplus g) \Theta g$$

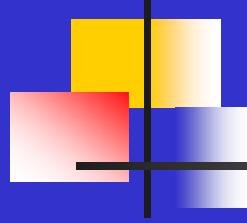


四、灰值形态学

3、灰值开、闭运算

- 开、闭运算的滤波性质



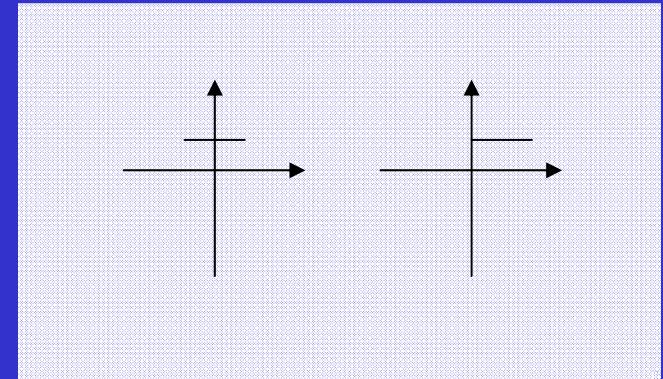


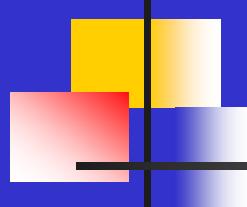
四、灰值形态学

4、灰值形态学算法

- 扁平结构元素
 定义域上取常数的结构元素
- 灰值形态学梯度

$$GRAD(f) = (f \oplus g) - (f \ominus g)$$





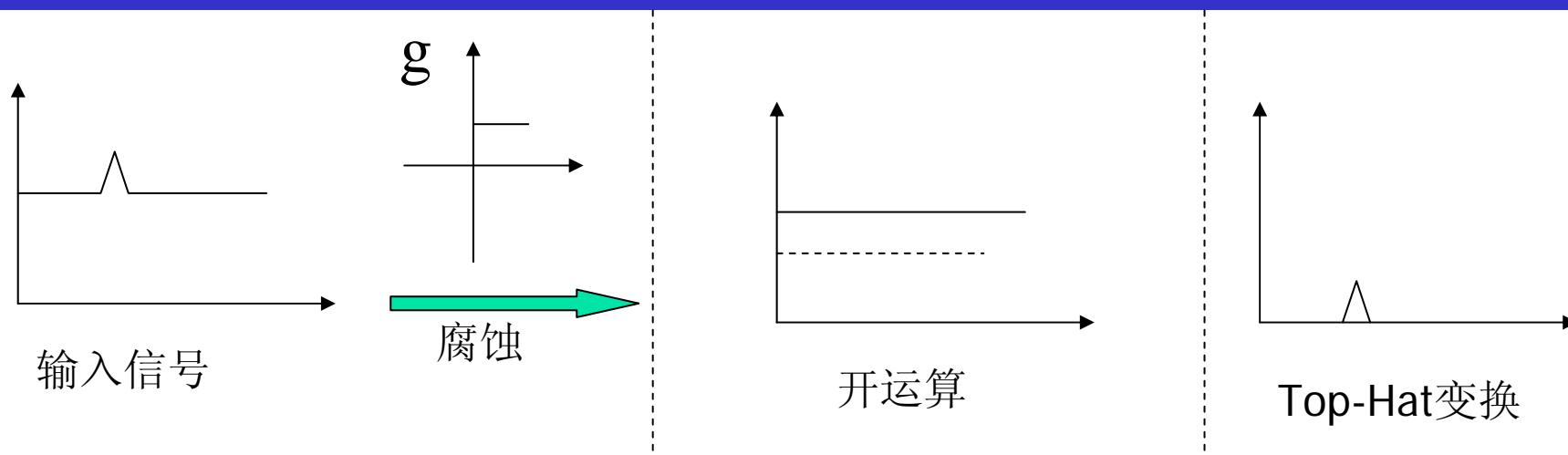
四、灰值形态学

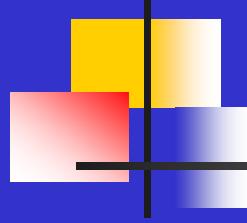
4、灰值形态学算法

- Top-Hat变换

$$HAT(f) = f - (f \circ g)$$

有检测波峰的作用，对在较亮的背景中求暗的象素聚集体(颗粒)，或在较暗的背景中求亮的象素聚集体非常有效。





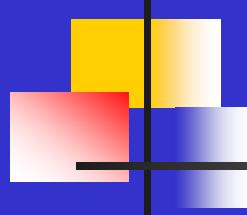
四、灰值形态学

4、灰值形态学算法

- Top-Hat变换

Top-Hat的对偶算子——波谷检测器

$$BTH(f) = (f \bullet g) - f$$

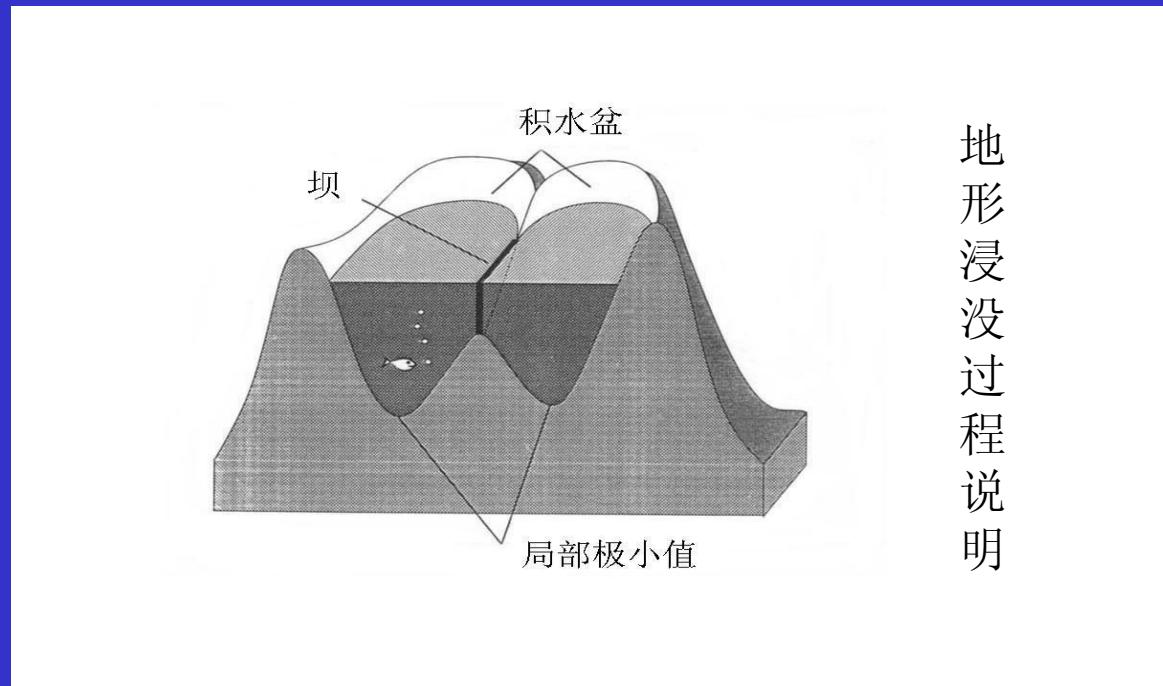


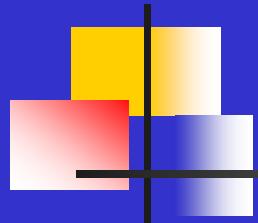
四、灰值形态学

4、灰值形态学算法

- 流域分割 (watershed变换)

原理：模仿地形淹没的过程

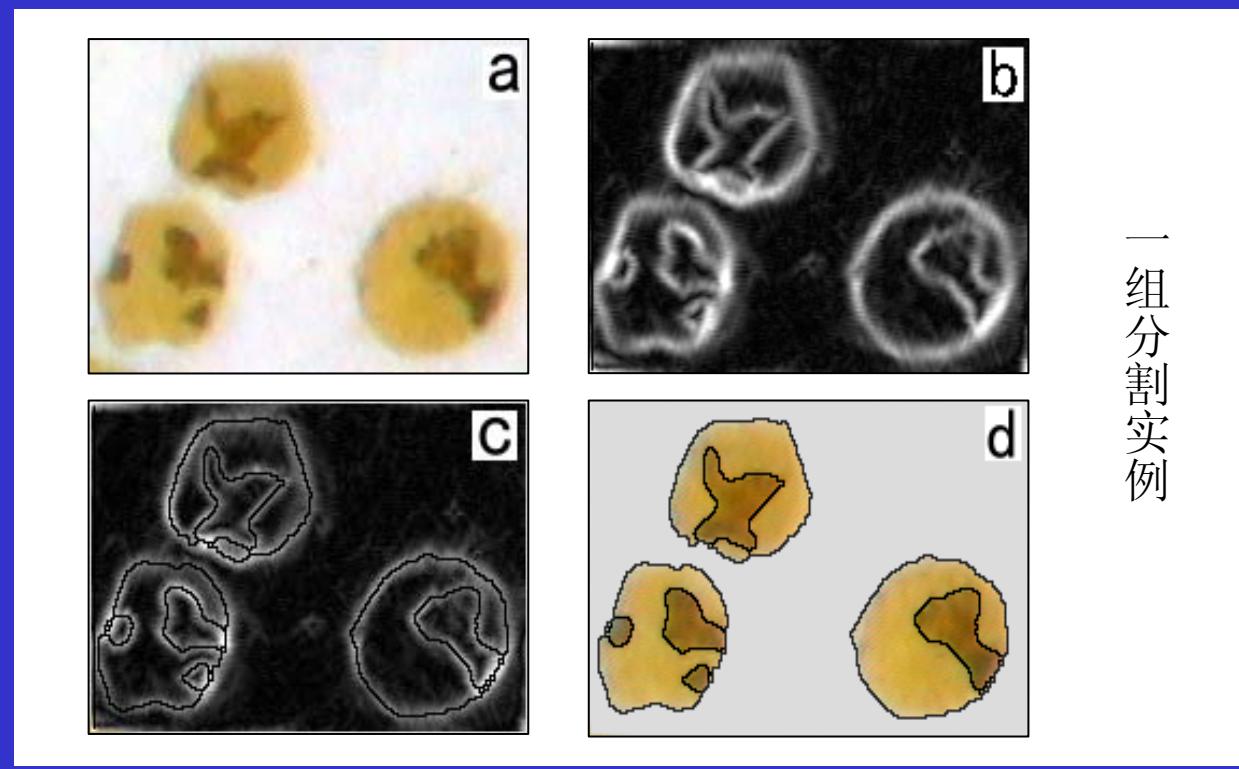


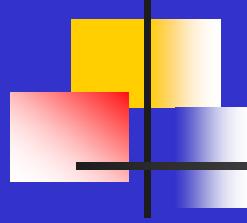


四、灰值形态学

4、灰值形态学算法

- 流域分割 (watershed变换)

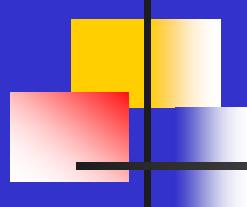




四、灰值形态学

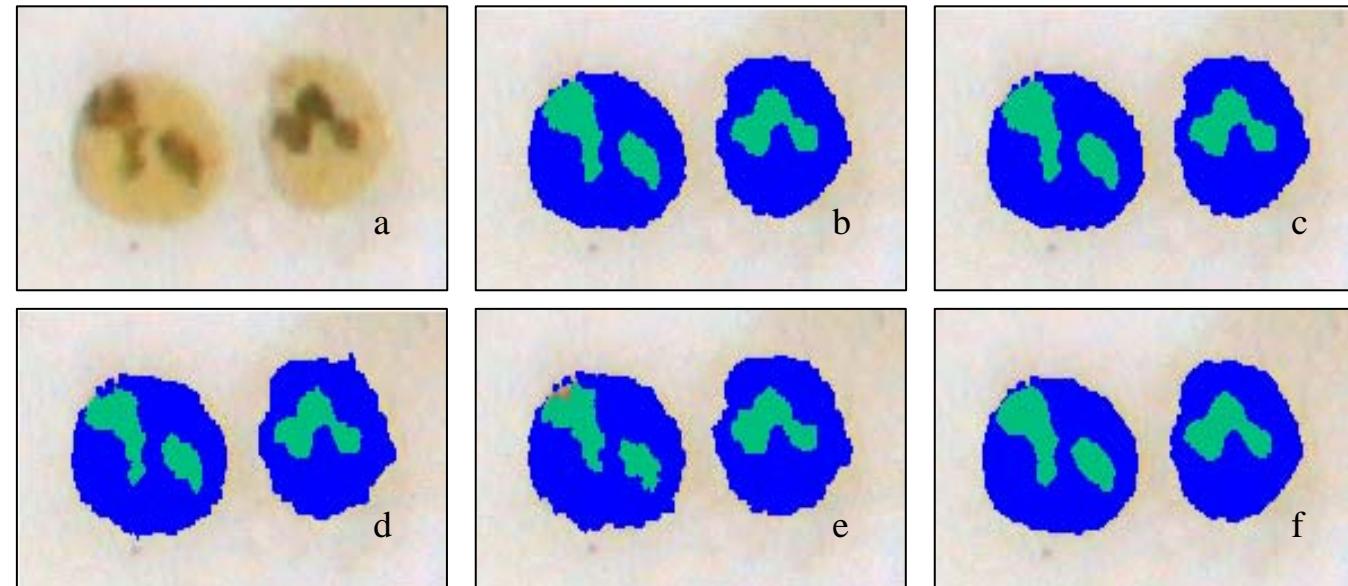
4、灰值形态学算法

- 基于标记的流域分割 (watershed变换)

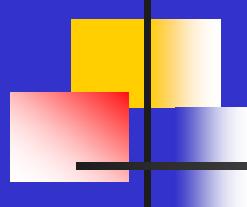


- 流域分割 (watershed变换)

关键技术1：梯度算子的选择



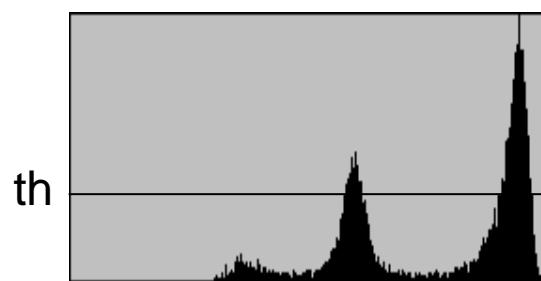
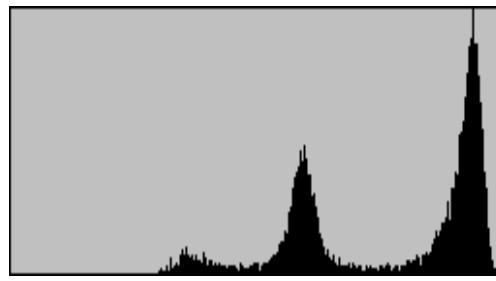
用不同梯度算子进行水域分割的结果，它们依次为**prewitt**、**sobel**、形态学梯度、最大距离梯度及**canny**梯度



- 流域分割 (watershed变换)

关键技术2：种子点的选取

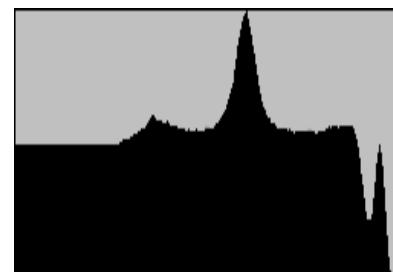
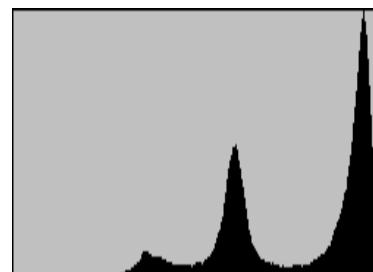
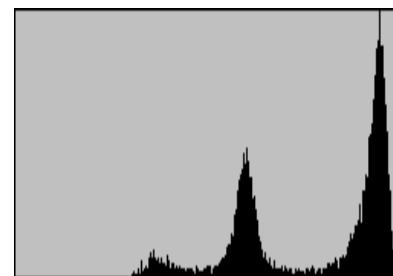
一种比较典型的方法是通过截取直方图的峰选取种子点的方法

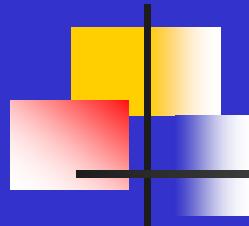


- 流域分割 (watershed变换)

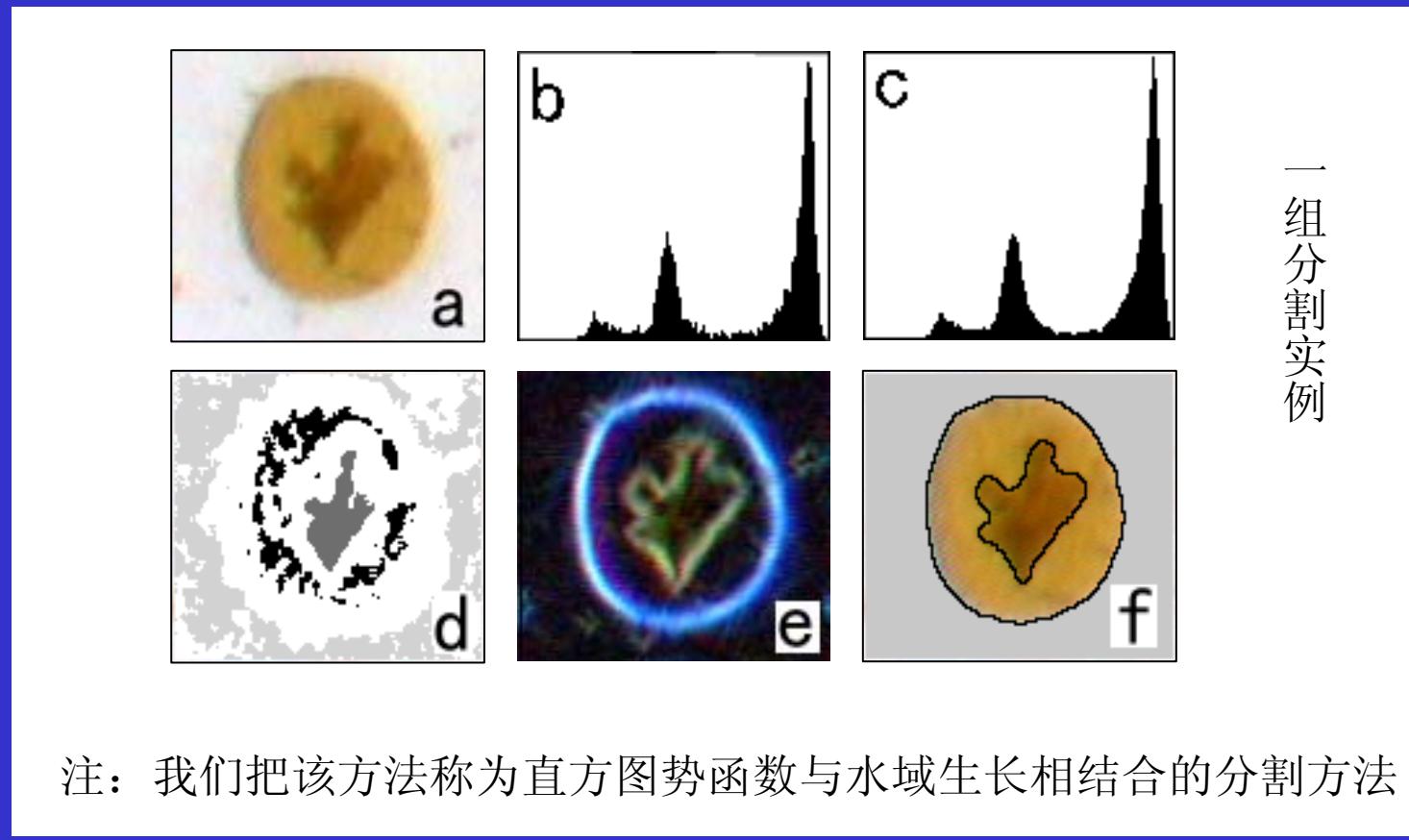
关键技术2：种子点的选取

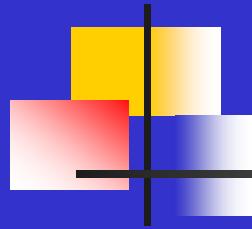
改进——利
用直方图的势
函数特性选择
种子点





- 流域分割 (watershed变换)





作业：1、二值图像开运算

2、灰值形态学梯度



第八章 图象数据压缩

8.1 概述

1、图象数据压缩是为了检索、存储、传输的需要

图象经常用到搜索（查找分区、判别边界都要搜索）如何搜索算法。为了提高搜索速度涉及两个问题：存贮分式及存贮结构（图象的数据结构）。

存贮方式有两大类：一类为文件管理系统下数据结构，即作为标准的数据文件；另一类为在系统的外部卷，即作为系统驱动程序下直接读写，其卷结构由设计者自己规定，这种结构的优点：1、空间节省（可更充分利用存贮介质）；2、读写速度快。

文件结构：提供一种能快速搜索到所需数据文件组织方式。

——逐点查找

——先粗后细查找方式：

- * 四叉树（地图逐级放大，世界——国——省——县）

- * 二叉树

2. 图象一大特点是数据量大，给存贮、传输带来困难，需压缩

例：电话线传输速率一般为56Kbits/s（波特率）

一幅彩色图像 $512 \times 512 \times 24\text{bit} = 6\text{M bits}$ 大小。传一幅图象需2分钟左右。

实时传送更难： $512 \times 512 \times 24\text{bits} \times 25\text{帧/秒} = 150\text{Mbits/S}$

如压缩20倍，传一幅图6秒左右，可以接受，实用。

实时，要专用信道（卫星、微波网、专线网等技术）。

另外，大量资料需存贮遥感、故宫、医学CT、MR。

图像数据可压缩性分析：

从统计观点出发，简单直观地讲，就是某一象素的灰度值，总是和周围其他象素灰度值有某种关系，应用某种编码方法提取并减少这些相关特性，便可实现图象信息的数据压缩。

图象数据压缩的目的可以是节省图象存贮器容量，也可以是减少传输信道容量，还可以是为了缩短图象加工处理的时间。】

编码例子： 8个灰级，总计 $64*64=4096$ 点图像

D_A	n_k	$P_r(r_k)$	编码1	长度	编码2	长度
0	790	0.19	000	3	11	2
1/7	1023	0.25	001	3	01	2
2/7	850	0.21	010	3	10	2
3/7	656	0.16	011	3	001	3
4/7	329	0.08	100	3	0001	4
5/7	245	0.06	101	3	00001	5
6/7	122	0.03	110	3	000001	6
7/7	81	0.02	111	3	000000	6

编码1平均码长： 3bits; 编码2平均码长： 2.7bits

(1) 压缩方法:

按时间分:

静图: 静止图象 (要求质量高)

动图: 活动的序列图象 (相对质量要求低, 压缩倍数要高)

压缩比 = 未压缩的图象的存贮字节数 / 压缩后图象存贮字节数

失真与否分:

无失真压缩: 经压缩后再恢复图象与原图象无任何区别, 一般
压缩倍数 < 2

有限失真压缩: 单帧 (静) 4~20倍。

图象序列 (x、y、t) 50~200倍

(2) 压缩失真度衡量标准:

a. 客观:

输出与输入之差: $e(x,y) = g(x,y) - f(x,y)$

整图: $\bar{e}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^2(x, y)$

均方差: $e_{rms} = [\bar{e}^2]^{1/2} = \sigma$

量纲: 灰度级。

亦也将输出与输入之差看作噪声。

输出图象均方信噪比定义为: $g^2(x,y) / e^2(x,y)$

$$(SNR)_{ms} = \frac{\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} g^2(x, y)}{\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^2(x, y)}$$

$$(SNR)_{rms} = [(SNR)_{ms}]^{1/2}$$

常用：峰值信噪比

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{\sigma^2} \quad (peak \ signal \ to \ noise \ Ratio)$$

一般 $\sigma < 2$, 或 $PSNR \geq 40 \text{dB}$ 人眼看不出来

$< 30 \text{ dB}$ 的图象不能用

$\sim 35 \text{ dB}$ 可接受

[到目前为止, 国际上很难找出一个通用的评价图象压缩的客观标准]

b. 主观（人判别）——专家投票的方法，实用方法。

①人的视觉的主观亮度是光强的对数函数。
②人眼对黑暗区误差比明亮区更敏感。
③人眼对灰度突变边缘比较敏感。

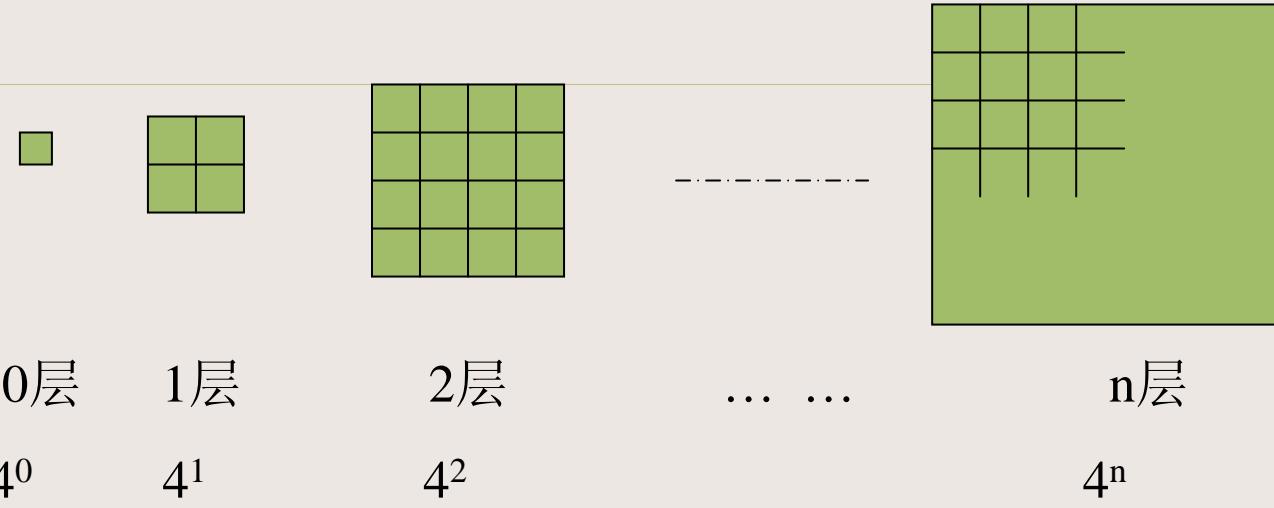
（3）图象压缩的技术指标：

- a. 保真度——与用途有关，例如侦察与体育比赛关心内容不同
- b. 压缩比：原图象数据量 / 压缩后数据量或 0.3bit/pixel
- c. 误码扩散程度
- d. 实时性——与压缩算法、系统速度有关
- e. 保密性——传输中防止被盗，SPOT 是数据需解码（高明压缩方法，压缩后仍是一幅图）
数字水印技术——watermarking

8.2 四叉树 (金字塔pyramid或Quad tree)

适用于 $N = 2^n$ 图象

四叉树:

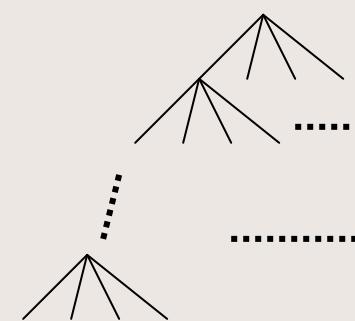


四叉树全部保留, 总数据量为:

$$\text{点数} = \sum_{k=0}^n 4^k = \frac{4^{n+1} - 1}{3} = \frac{4}{3} \cdot 4^n$$

全分辨率图:

4^n 点数, 数据量增加 $1/3$, 对搜索有好处, 找到有关兴趣区域后再提取感兴趣的下一层图象。



8.3 信息有关的基本概念

1. 信息的度量

7月份天气报：“明天下雨”， 信息量小

10月份天气报：“明天下雪”——概率事件发生，信息量大
即：

概率低——信息量大

概率高——信息量小

怎么定量？

戈壁滩一年下雨概率1/128，晴概率127/128。

对天气预报的信息量多少？

引入 $-\log_2 p$ 代表信息量

如： $-\log_2 1/128 = 7$ 有雨

$-\log_2 127/128 \approx 0$ 晴

信息具有可加性：

一个 9×9 方阵，一个士兵在某一位置的概率 $1/81$ ，

信息 = $-\log_2 1/81 = 6.34$

在特定行上的概率 $1/9$ ： 信息 = $-\log_2 1/9 = 3.17$

在特定列上的概率 $1/9$ ： 信息 = $-\log_2 1/9 = 3.17$

行、列信息量和： $3.17 + 3.17 = 6.34$

引入一个信息度量 $I(P)$

特点： ① $0 \leq p < 1$ 信息量 $I(P)$ 连续变化

② $P = 0, I(P) = \infty$

③ $P = 1, I(P) = 0$

④ $P_1 > P_2, I(P_2) > I(P_1)$

⑤ $I(p \bullet q) = I(p) + I(q)$

$I(P) = -\log_b p$ — 一般 $b = 2$

2. 信息熵 (Entropy)

预期能得到的平均信息量, $I(P_i)$ 的数学期望值。

对于M个灰阶: $P_i \quad i = 1, 2, \dots, m$

$$\text{熵 } H = \sum_{i=1}^M p_i \bullet I(p_i) = - \sum_{i=1}^M p_i \log_2 p_i$$

例1, 当 $P_i = 1/4, \quad i = 1, 2, 3, 4$

$$H = 2$$

当 $P_1 = 1/2, \quad P_2 = 1/4, \quad P_3 = P_4 = 1/8$

$$H = 1.75$$

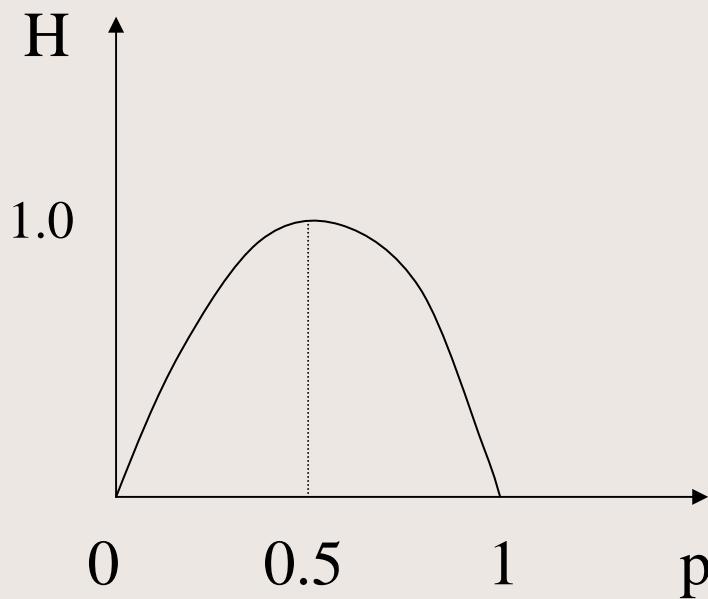
例2, 二值图象, $x_i = 0, 1$

0值概率: p

1值概率: $1-p$

$$H = p \log 2^{\frac{1}{p}} + (1-p) \log 2^{\frac{1}{(1-p)}}$$

$H \sim p$ 变化关系可以
发现, 当 $p=0.5$ 时熵最
大。



一般讲，对M个灰
值，

$$\sum_{i=1}^M p_i = 1$$

求H的条件极值，即： $p_i = \frac{1}{M}$ (i=1,2,...,M)

$$H_{\max} = -\log 2^{\frac{1}{M}} = \log 2^M$$

M = 256时， H_{max} = 8

注意熵H的特点：

$$H > 0$$

$$H_{\max} = \log 2^M$$

$$H < H_{\max}$$

8.4 可逆保真编码（无失真压缩）

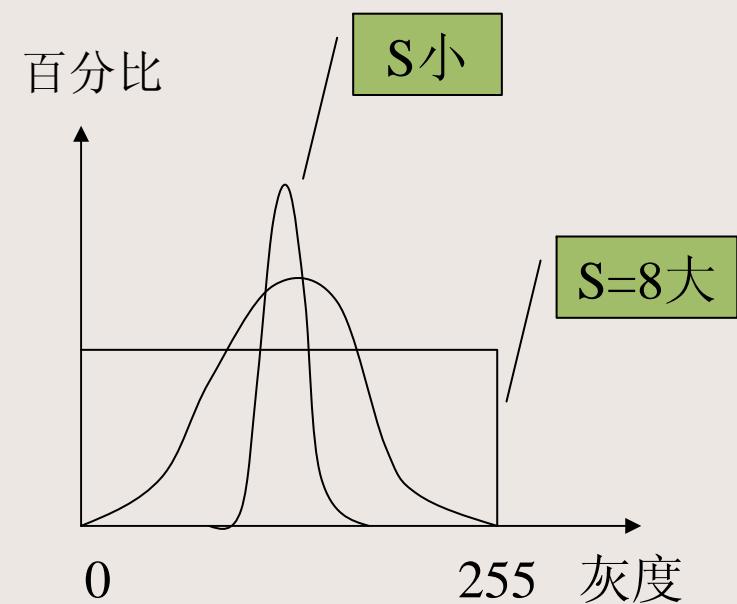
熵：平均信息量

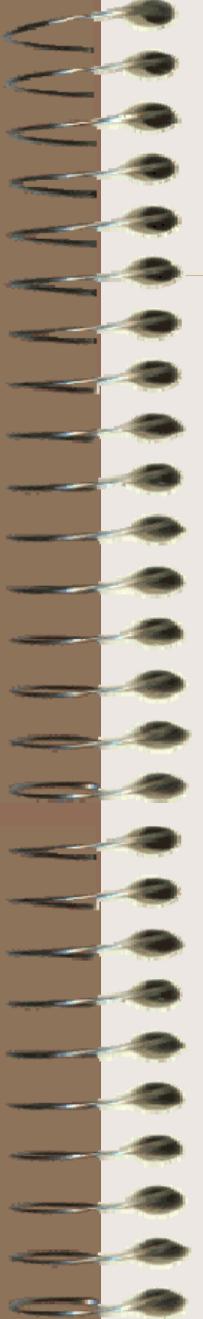
一般图象压缩模式：



$$\text{一阶熵 } S = - \sum_{i=1}^M p_i \log_2 p_i$$

孤立地考察每个象素点出现概率。





注意：恰当做变换熵可以减小。

例：

熵变小，把信息转移到变换模型中（高阶熵概念）

结论：

不作变换时无失真编码压缩极限是熵

一幅图(8*8*3bits)	灰度	频数	概率	熵
4 4 4 4 4 4 4 0	0	8	0.125	0.375
4 5 5 5 5 4 5 0	1	0	0	0
4 5 6 6 6 4 5 0	2	0	0	0
4 5 6 7 6 4 5 0	3	0	0	0
4 5 6 6 6 4 5 0	4	31	0.484	0.507
4 5 5 5 5 4 5 0	5	16	0.25	0.50
4 4 4 4 4 4 4 0	6	8	0.125	0.375
4 4 4 4 4 4 4 0	7	1	0.016	0.096
	和	64	1.0	1.853

1. Huffman码——紧凑编码

n 个由 $(m_1 \dots m_n)$ 信息， 概率为 $P_1 \dots P_n$ ，

$$\sum_{i=1}^n p_r = 1$$

基本思想：对概率大的信息分配短码，小的分配长码。

步骤：先作直方图统计，按出现概率由大到小排队。

而后反向编码：

概率大的赋0，

概率小的赋1。

实现：可以按块、按总体统计或自适应边统计边修正。

此码变长，不易实现，当概率变，则编码方式亦变化。

2. B码:

每个码分成两部分，即延续比特和信息比特。

↓
分割码字 代表有效信息

$C \times C \times C \times C \times \dots$ (0或1表示)

C相同的表示同一个码字

C变号表示前一个码字结束。

3. 移位码

2位码可有00, 01, 10, 而11作为移位码，超过3的倍数用11的次数表之。

4. 行程编码(Run--Length Coding)

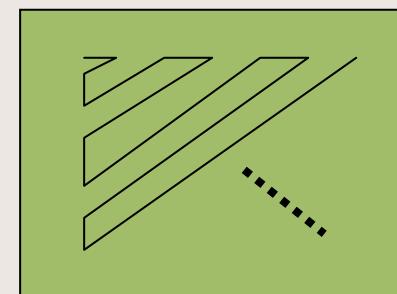
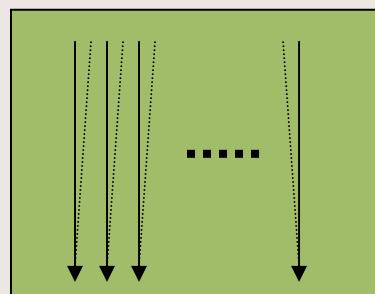
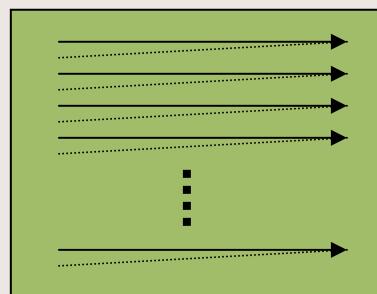
由灰度长度对组成, 即(灰度, 长度), 根据前图按垂直方向扫描, 可编为:

(4,9) (5,5) (4,3) (5,1) (6,3) (5,1) (4,3) (5,1) (6,1) (7,1)

(6,1) (5,1) (4,3) (5,1) (6,3) (5,1) (4,3) (5,5) (4,10) (0,8)

结果: 64个数据压成到40个。

通常扫描走向:



另一种扫描方向线选取，Helbert曲线——行程编码。

递归算法：

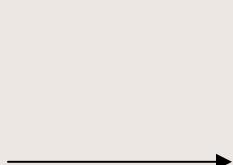
□ A: $D \leftarrow A \downarrow A \rightarrow B$

□ B: $C \uparrow B \rightarrow B \downarrow A$

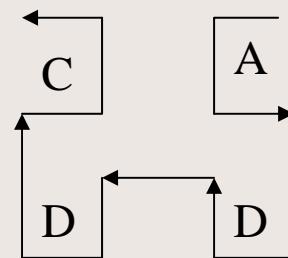
□ C: $B \rightarrow C \uparrow C \leftarrow D$

□ D: $A \downarrow D \leftarrow D \uparrow C$

□ D



1级



2级

对前图用Helbert曲线扫描结果：

4 4 5 4 4 4 5 5 6 6 7 6 5 5 4 4

4 5 5 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 6 6

6 5 5 5 4 4 4 4 4 4 0 0 0 4 4 0

0 0 4 4 5 6 6 5 5 5 4 4 4 4 0 0

得：(4,2) (5,1) (4,3) (5,2) (6,2) (7,1)

(6,1) (5,2) (4,3) (5,2) (4,9) (5,2)

(6,3) (5,3) (4,6) (0,3) (4,2) (0,3)

(4,2) (5,1) (6,2) (5,3) (4,4) (0,2) $24 \times 2 = 48$

[目前算术编程码效率最高,计算量大]

8.5 有限失真编码

1. 插值编码

量化: 灰度分辨率

采样: 空间分辨率

仅保留*部分灰值其它部分值求得

*	o	*	o	*	o	*
o	*	o	*	o	*	o
*	o	*	o	*	o	*
o	*	o	*	o	*	o

*			s_3
*	o	*	s_1 s_0 s_2
*			s_4

2. 按块取齐编码

将 $N \times N$ 图像分成 $M \times M$ 大小之块， $M \leq N$ 然后分别对每个 $M \times M$ 块内之数据压成一位长，按力矩不变原则选阈值并二值化而得到，同时还需保留恢复力矩必须的信息。

步骤：①由中值分割成二值图，

②由一、二次力矩计算出分别之A，B值，

③保留二值图像及 f, σ 。

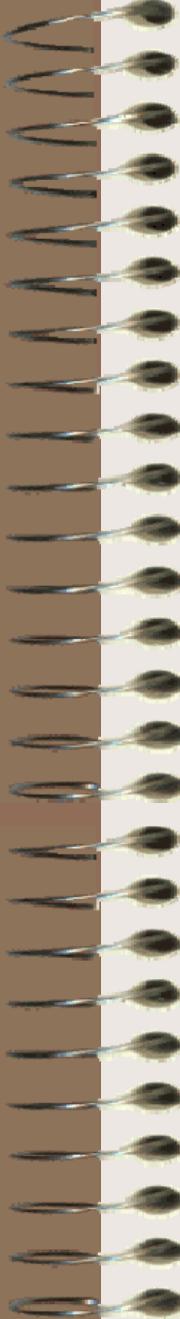
例：

原图	恢复后图	二值图
112 114 56 47	204 204 17 17	1 1 0 0
37 200 247 255	17 204 204 204	0 1 1 1
16 0 12 169	17 17 17 204	0 0 0 1
43 5 7 251	17 17 17 204	0 0 0 1

小范围内恢复后的灰度值近似取为一样，看不出差别，主要特征保留。

优点：按块等长编码，防误码扩散。

缺点：四行才能计算，需要行存贮。



3. 变换编码

概念：将空间域里的图象，经过某种变换（通常用正交变换，如付氏变换，沃尔什变换等），在某种变换域里描述，一般来说，在变换域里描述要比空间域里简单，而且图象相关性明显下降，这样变换本身就能实现编码率的压缩。若再对变换域图象进行某种处理（如频域中的二维滤波）以及熵编码，则可进一步压缩图象的编码比特率。对变换处理后的图像信号施以上述的反变换，即可获得空间域图象。

变换目的是去相关、相邻象素相关性强，变换运算量与 N^2 成正比。一般N取 8×8 块或 16×16 块（块小压缩倍数少，没意义；块大，相关性弱）。

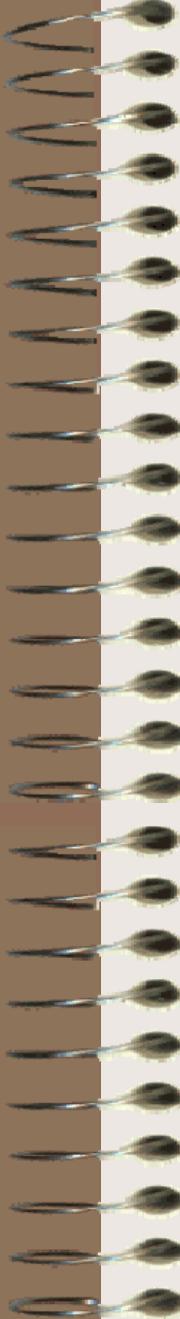
4. 预测编码:

由前m点预测当前点，存预测值与实际值的差值 Δ

典型：相邻象素灰值相减，存差值。

预测结果：①多米诺骨牌，误码扩散严重。

②分块后边缘损失。



5. 矢量编码

简化描述：全图n个点，有 $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$ ，有m个组，近似归纳为有限个模式，如k组，全图有 n/m 组， $n/m \geq k$ ，

存k组 + n/m 个组号。

8.6 图象帧间编码

序列图象（动图）帧间相关性强

1. 静止运动部分的关系：

Bell实验室研究成果，人对静止部分分辨率强，对运动部分分辨率弱——要求不高。即：空间分辨率高，时间分辨率低一些。

2. 传送帧间差——对帧间差压缩传输，两幅之间对应象素的灰度差<某一阈值，取为零。

3. 运动检测：图象分成一定大小的块（ $M \times N = 16 \times 16$ ）子块，在 $(M+2L, N+2L)$ 范围内到前一帧图上搜索与某相关性最大的子块。

相关函数：

8.7 JPEG与MPEG

(Joint Photographic Expert Group, Motion Picture Expert Group)
90年代初期制定。

1. JPEG: 87~91年初制定的一系列标准。

基本方案:

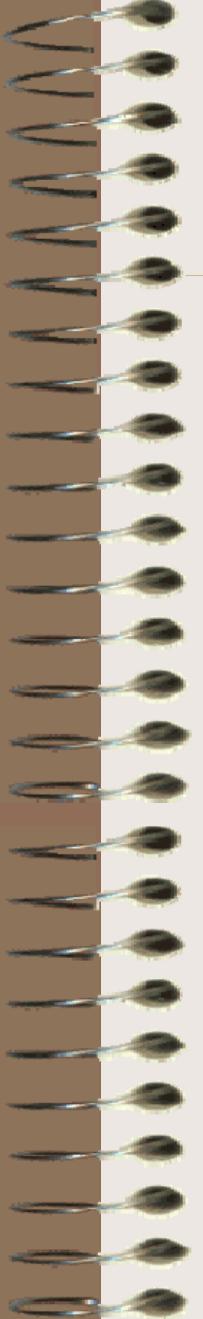


DCT: 8×8 块做DCT变换,统计分析表明, 图象局域相关性较强。

量化: 人的感觉对低频敏感, 各系数对人眼的重要程度区别对待, 即非均匀量化。

沿长编码: (锯齿形编码) 后半很多都是零有利编码。

8×8 块, 每块做DCT直流分量, 按块作预测编码, 交流分量量化后作延长编码。对沿长编码结果作Huffman编码。



多波段问题：

地物波谱224波段，彩色R、G、B三波段，各波段间存在相关性，如彩色，人眼对亮度最敏感，对颜色分辨率较弱。

R、G、B) —— 亮度、色调、饱和度

(理论：主分量分解最佳)

R、G、B—Y.U.V(PAL西德)

Y.I.Q(NTSC 美国)

2. MPEG压缩 (1、 2、 4)

基本思想：帧间编码：

① 第一帧用JPEG（帧内编码），隔8帧有一帧作帧内编码1, 9, 17, 25,

② P帧做预测编码，用前后两帧（1, 9）作预测。

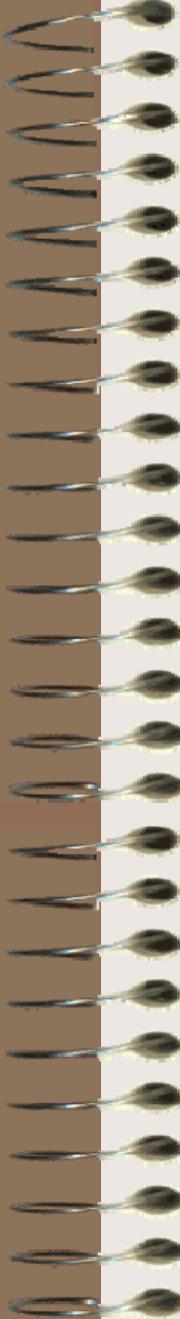
例：开窗与否。双向预测、运动检测，希望误差小。

③ 双向补插：

2, 3, 4可由1, 5两帧按时间线性插值得到。

压缩后存贮顺序：1, 9, 5, 2, 3, 4, 6, 7, 8

其它压缩方法：分形、小波等。



第九章 图象重建

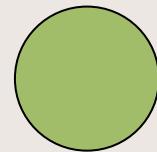
9.1 概述

由物体截面投影来重建该截面图象是近年来发展起来并获得广泛应用的图象处理技术。图象重建的最典型应用是医学上的计算断层摄影技术（CT）技术。它用于人体头部、腹部等内部器官的无损伤诊断，其基本方法就是根据人体截面投影，经过计算机处理来重建截面图象。

[计算机发展后就出现的一个分支，不同于传统处理与图形]

问题：能否从投影中恢复原图？答复是肯定的。

投影几何对规则形状已有系统办法，圆柱（认为内部是均匀的）



正视图



侧视图

视图增加，即无限多视图可以解决任意三维物体原图。

Compute Aided Tomography (CAT)

一条射线沿S方向穿透物体，投影轴与X轴夹角为 θ ，建立s、t坐标系， (t,s) 与 (x,y) 关系如下式：

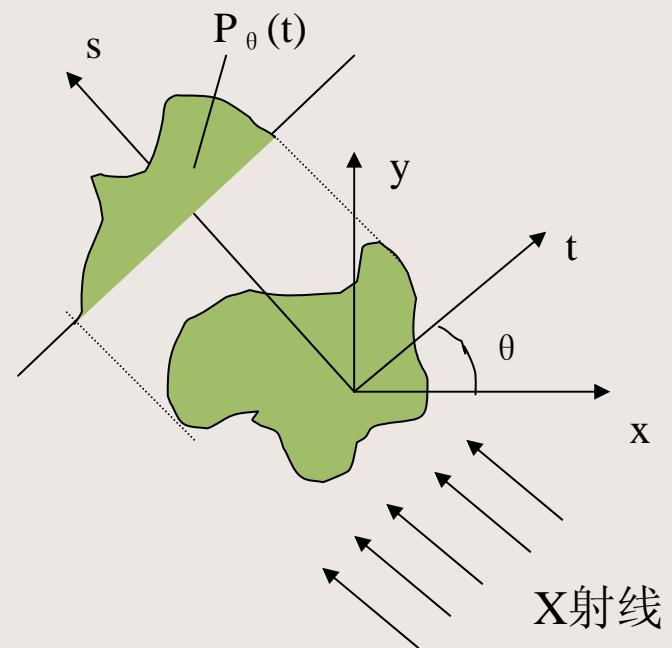
$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

沿射线积分组成投影：

$$p_\theta(t) = \int_{\text{射线}} f(x, y) ds$$

(是 $f(x, y)$ 在 θ 角位置之平行投影)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \cdot \sin \theta, t \sin \theta + s \cdot \cos \theta) \cdot ds$$



物理上X射线到人体有个衰减过程:

$$N_d = N_{in} \exp \left[- \int_{\text{射}} u(x, y) ds \right]$$

u(x,y)为x,y点的衰减

N_{in} : 入射X射线 (光子) 强度

N_d : X射线穿透物体后被检测到的射线强度

u(x,y): 反映了人体各部组织的性质, 在空间上的分布就形成了人体各部组织的图象, 所以u(x,y)实质上反映了图象灰度分布f(x,y)

$$\text{得: } \ln \left(\frac{N_{in}}{N_d} \right) = \int_{\text{射}} u(x, y) ds$$

※上述为一个切面, 一系列切面构成三维物体, 两种方法: 直接、间接。

9.2 基本原理:

对图像函数 $f(x, y)$ 付氏变换:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

$P_{\theta}(t)$ 的付氏变换

$$S_{\theta}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta}(t) \exp[-j2\pi w t] dt$$

当 $\theta = 0$ 时, $t = x, s = y, w = u$

$$S_0(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x) \exp[-j2\pi u x] dx$$

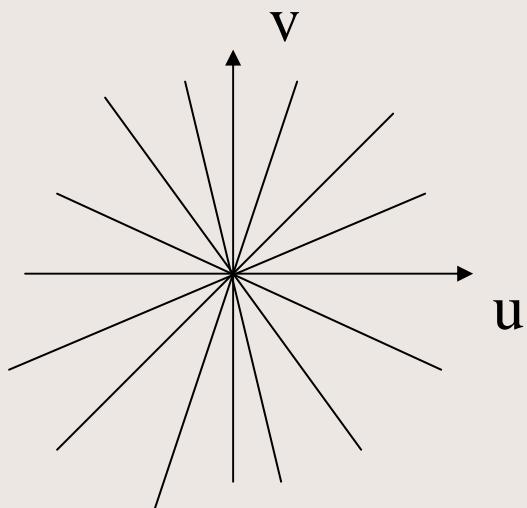
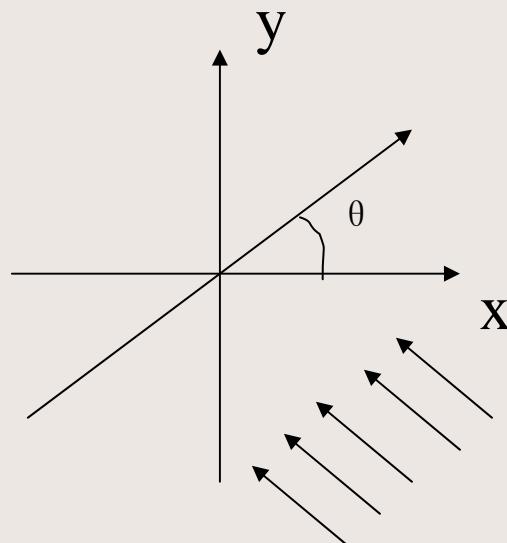
当 $v=0$ 时,

$$\begin{aligned} F(u, 0) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot \exp[-j2\pi ux] \cdot dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] \cdot \exp[-j2\pi ux] dx \end{aligned}$$

故有: $F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x) \cdot \exp[-j2\pi ux] dx = S_0(u)$ [即 $S_0(w)$]

此结果推广到一般情况下：

每一个 θ 下 $P_\theta(t)$ 付氏变换后对应于 $F(u, v)$ 在对应 θ 下的剖面值。只要有足够多的 $P_\theta(t)$ [n个]对应的 $S_\theta(u)$ ，就是足够多个 $F(u, v)$ 的剖面，进而可以逼近 $F(u, v)$ ，反变换即可求得 $f(x, y)$ 。



由付氏变换旋转不变性：

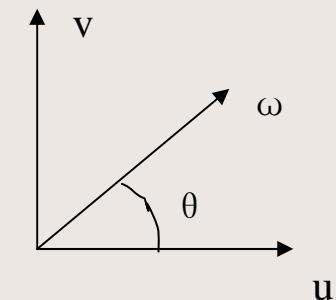
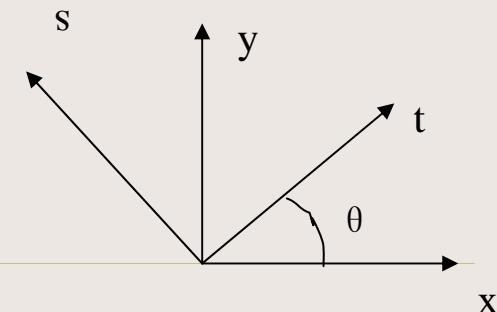
得： $S_\theta(w) = F(w, \theta) = F(u, v)$

(一般的 $S_\theta(w) = F(u, v)$ 的证明)

证： $f(t, s)$ 是 $f(x, y)$ 在 t, s 坐标上为函数

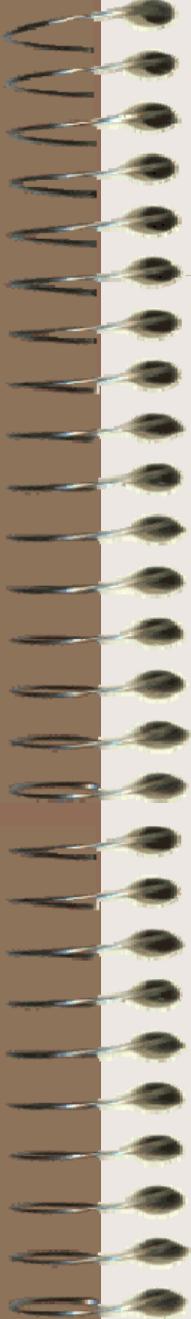
$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) \cdot ds$$



$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(t) \cdot e^{-j2\pi w t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(t, s) \cdot ds \cdot e^{-j2\pi w t} \cdot dt$$

这里 $\begin{cases} t = x\cos\theta + y\sin\theta \\ s = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ 代入 $[t, s \rightarrow x, y]$


$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x, y)_\theta \cdot e^{-j2\pi w(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

(在约束条件下: $u = w \cos \theta$ $v = w \sin \theta$)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)} \cdot dx dy$$

则: $S_\theta(w) = F(u, v) = F(w, \theta)$

实现流程:

$$p_\theta(t) \rightarrow F(w, \theta) \rightarrow F(u, v) \rightarrow f(x, y)$$

极坐标 直角坐标

9.3 濾波——逆投影法

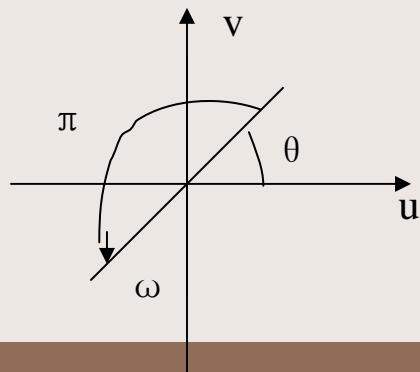
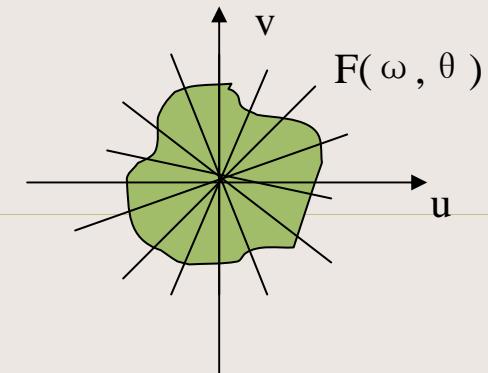
极坐标F的付氏反变换:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) \exp[j2\pi w t] w dwd\theta$$

这里: $t = x \cos \theta + y \sin \theta$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta) \exp(j2\pi w t) w dwd\theta + \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} F(w, \theta + \pi) \exp[j2\pi w(x \cos(\theta + \pi) + y \sin(\theta + \pi))] w d\theta dw$$

对极坐标: $F(w, \theta + \pi) = F(-w, \theta)$

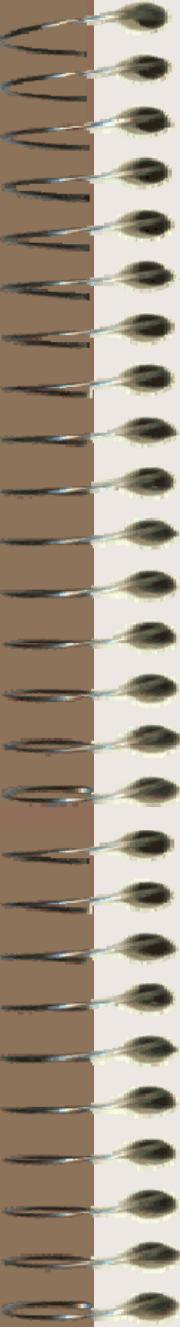


$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \left[\int_0^\infty F(w, \theta) \exp[jw] dw + \int_0^\infty F(-w, \theta) \exp[jw] dw \right] d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[\int_0^\infty F(w, \theta) \exp[jw] dw + \int_{-\infty}^0 F(w, \theta) \exp[j(-w)] dw \right] d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty F(w, \theta) |w| \exp[j2\pi wt] dw d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) |w| e^{j2\pi wt} dw \right] d\theta
\end{aligned}$$

令 $Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^\infty S_\theta(w) |w| e^{j2\pi wt} dw$

即: $f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$

下面的关键问题是如何求得: $Q_\theta(t)$


$$\text{离散形式: } \hat{f}(x, y) = \frac{\pi}{k} \sum_{i=1}^k Q_\theta(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)$$

→ 在某一 θ 下 Q_θ 对 x, y 之贡献。

下面讨论：

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(w) |w| \exp(j2\pi w t) dw = F^{-1}[S_\theta(w) \cdot |w|]$$

注意： $F^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = f(t) * g(t)$

$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) e^{-j2\pi w t} dt = F[P_\theta(t)]$$

若令 $h_1(t) = F^{-1}(|w|)$

则： $Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(\alpha) h_1(t - \alpha) d\alpha$

这里： $P_\theta(t)$ 已知（可实验测出），只要求得 $h_1(t)$ 即可求 $Q_\theta(t)$ 和 $f(x, y)$ 了。

|w|看作另一函数的付氏变换，其反变换是什么？
有如下几种近似办法：

1、若取 $|w| \approx 1$ ，即相当加入了 $|1/w|$ 滤波，（故 $|1/w| \cdot |w| = 1$ ）
 $|1/w|$ 加入低通滤波，图象变模糊了。

2、找一个函数其结果近似 $|w|$ ：

用 $G(w) = |w| \cdot R(w)$

$$R(w) = \begin{cases} 1 & |w| < w_c \\ 0 & \end{cases}$$

即认为有限带宽（人为限定）

$$\text{则: } g(t) = \int G(w) e^{j 2 \pi w t} dw$$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= 2w_c^2 \left(\frac{\sin 2\pi w_c t}{2\pi w_c t} \right) - w_c^2 \left(\frac{\sin \pi w_c t}{\pi w_c t} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2\tau^2} \left[\frac{\sin(2\pi t/2\tau)}{2\pi t/2\tau} \right] - \frac{1}{4\tau^2} \left[\frac{\sin(\pi t/2\tau)}{\pi t/2\tau} \right]^2
 \end{aligned}$$

若 $P_\theta(t)$ 的采样间隔为 τ ，则最大 $w_c = 1/(2\tau)$ 否则将引起混迭。

用 $g(t)$ ，间隔 τ 采样：

则 $g(t)$ 在 $P_\theta(t)$ 采样点上的值 $g(n\tau)$ 为： (这里: $t=n\tau$)

$$g(n\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4\tau^2} & n=0 \quad (\text{相当 } t=0 \text{ 时}) \\ 0 & n \text{ 为偶} \\ \frac{-1}{n^2\pi^2\tau^2} & n \text{ 为奇} \end{cases}$$

此处 $P_\theta(t)$ 及 $g(t)$ 均为有限带宽函数，用 $P_\theta(k\tau)$ 及 $g(k\tau)$ 代表其采样值，用 sinc 函数插值。[对 $P_\theta(k\tau)$ 及 $g(k\tau)$]

$$\tau = \frac{1}{2w_c} \quad \text{则}$$

$$\left. \begin{aligned} p_\theta(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_\theta(k\tau) \left[\frac{\sin 2\pi w_c (t - k\tau)}{2\pi w_c (t - k\tau)} \right] \\ g(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\tau) \left[\frac{\sin 2\pi w_c (t - k\tau)}{2\pi w_c (t - k\tau)} \right] \end{aligned} \right\} \quad ①$$

$$\text{相应 } Q_\theta(t) = p_\theta(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(t') g(t - t') dt$$

将 ① 带入上式，可得到采样点上的值：

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n\tau - k\tau) p_\theta(k\tau)$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$ 共 N 个 (即实际投影范围有限)

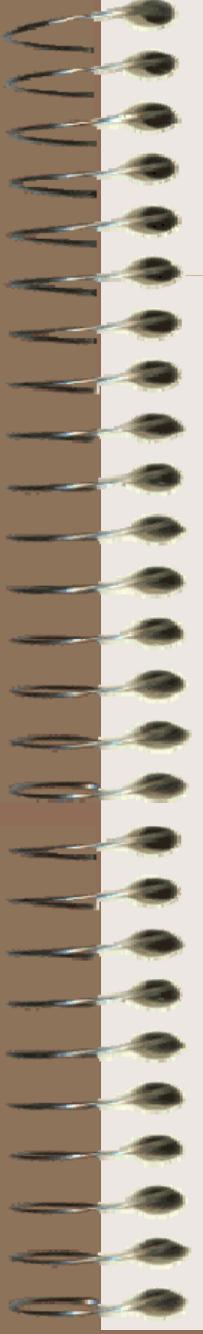
即:
$$Q_\theta(n\tau) = \tau \sum_{k=0}^{N-1} g(n\tau - k\tau) p_\theta(k\tau)$$

3、

$$G(w) = \left| \frac{2}{a} \sin \frac{wa}{2} \right| \left[\frac{\sin \left(\frac{wa}{2} \right)}{\left(\frac{wa}{2} \right)} \right]^2$$

当 $w \rightarrow 0$ 时, $G(w) \sim |w|$

$$g(t) = \begin{cases} g(0) = \frac{4}{(\pi a)^2} \\ g(ka) = \frac{-4}{\pi^2 a^2 (4k^2 - 1)} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$


$$4. \quad G(w) = |w| e^{-\varepsilon |w|}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $G(w) \approx |w|$

$$g_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon^2 - (2\pi t)^2}{[\varepsilon^2 + (2\pi t)^2]^2}$$

当 t 足够大时: $g_\varepsilon(t) = \frac{-1}{(2\pi t)^2}$

讨论:

取样点 N 大则 τ 小; N 小则 τ 大, 混迭严重。

因 $P_\theta(T)$ 有限范围, $S_\theta(W)$ 为无限带宽, 混迭必然。

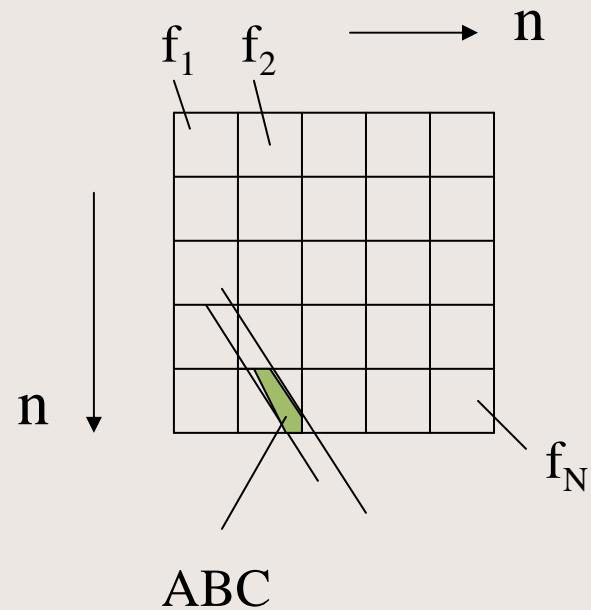
实现方法多种多样, 取决于速度与精度, 投影个数, K 有关。实用为弧面, 几何关系更复杂一些。

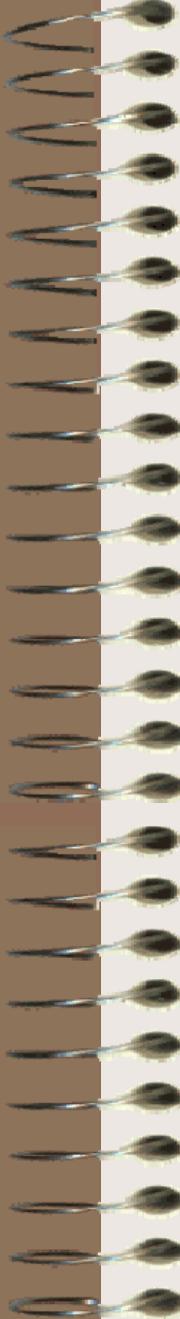
9.4 代数投影变换法

$f(x,y)$ 重建可用代数法实现, $f(x,y)$ 在 $n \times n$ 网格上, 每个 (x,y) 处为常数。

一条射线理解为有一定宽度, 射线之值可理解为沿线各网格的贡献总和:

总数 $n \times n = N$ 。




$$\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j = g_i \quad i = 1, 2 \dots M \quad M \text{为所有各方向投影中射线总数。}$$

a_{ij} 是第j个网格对i射线之贡献

$$a_{ij} = \frac{(\text{ABC面积})}{\Delta x \Delta y}$$

(实际每一射线又经过有限格子, 多数 a_{ij} 为0)

$$\begin{cases} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \dots + a_{1N}f_N = g_1 \\ \vdots \\ a_{M1}f_1 + a_{M2}f_2 + \dots + a_{MN}f_N = g_M \end{cases} \rightarrow \bar{a}_i^T \cdot \bar{f} = g_i$$

一般 $M > N$

例: 对 128×128 图象, 150个投影, 每个投影150条射线。

a_{ij} 有 $150^2 \times 128^2 = 3.68 \times 10^8$ 个

实际上方程无法解, 一般用迭代法逐次近似求解。

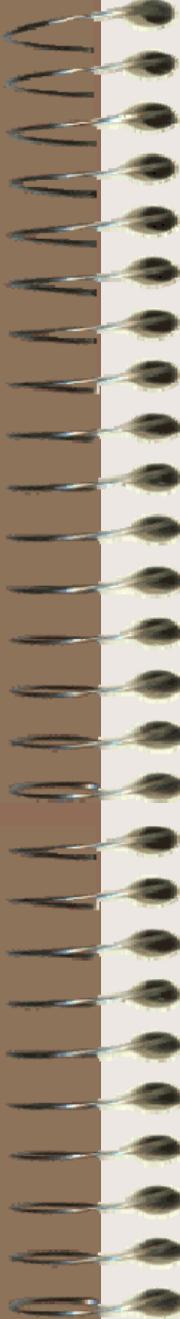
给定初值 $\bar{f}^{(0)}$

当 \bar{f} 非正确解时, $\bar{a}_i^T \cdot \bar{f}^{(0)} \rangle g_i$ 通过减少 \bar{f} , 修正

$\bar{a}_i^T \cdot \bar{f}^{(0)} \langle g_i$ 通过加大 \bar{f} , 修正

$$\bar{f}^{(1)} = \bar{f}^{(0)} - \frac{(\bar{a}_i^T \cdot \bar{f}^{(0)} - g_i) \bar{a}_i}{\bar{a}_i^T \cdot \bar{a}_i}$$

反复迭代即可求解。



9.5 图象重建技术的应用

主要在放射医疗、工业检测设备中，显示人体（对象）各个部位断层图象。

历史：

理论源于1917年，奥地利数学家（Radon）所发表的论文。证明了二维或三维物体能够通过其无限多个投影来确定，但限于当时技术条件没能实现。

60年代初，计算机技术发展，重建受到重视，不少学者做了卓有成效的研究。其中：英国EMI公司中央研究所工程师Housfield，经四年努力，在1972年研制成诊断头颅用的第一台计算机X线断层摄影装置，这一新设备在1974年5月蒙特利尔(Montreal)召开第一次国际CT会议上，正式命名为“电子计算机断层摄影技术”简称CT。

1979年EMI公司又研制出全身CT。

1979年这项技术获诺贝尔奖。



几代产品（按扫描方式的改进）：

第一代：单束扫描方式，X射线管与探侧器同步水平直线运动，时间长，一周需4分钟左右。

第二代：窄角扇束扫描，张角10~20度，20~30个探测器相配合。扫描时间20秒左右。

第三代：广角扇束扫描方式，张角为30度左右，探测器增加到250~350个，射线源和探测器同步旋转扫描，扫描时间可缩短2.5秒。

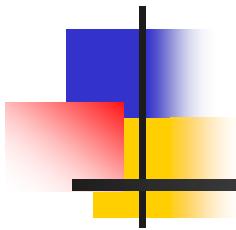
第四代：三代基础上发展，检测器1500个左右，布满整个360°固定不动，X线源旋转扫描。约2秒。

第五代：28射线管，0.01秒，1秒内重复60次。



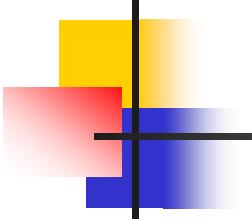
目前拓展、超声CT、放射性同位素正电子CT、质子CT。

CT其它领域：电子天文学、电子显微镜。



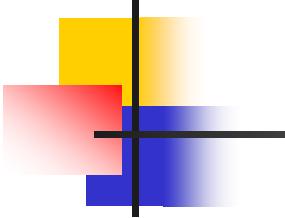
小波变换及其在 图像处理中的典型应用

赵丹培
宇航学院图像处理中心
2007年6月



目 录

- 一、从傅里叶变换到小波变换的时频分析法
- 二、多分辨分析
- 三、尺度函数与小波
- 四、离散小波变换与二进小波变换
- 五、小波变换的实现
- 六、图像的多分辨分解与重建
- 七、小波变换在图像边缘检测中的应用
- 八、小波变换在图像去噪中的应用
- 九、小波变换在图像融合中的应用

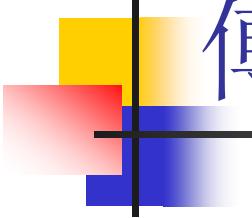


一、从傅里叶变换到小波变换 的时频分析法

- 傅里叶变换只能提供信号在整个时间域上的频率，不能提供信号在某个时间段上的频率信息；
- 短时傅里叶变换将整个时间域分割成一些小的等时间间隔，然后在每个时间段上用傅里叶分析，它在一定程度上包含了时间频率信息，但由于时间间隔不能调整，因而难以检测持续时间很短、频率很高的脉冲信号的发生时刻。

小波起源：

- “小”是指在时域具有紧支集或近似紧支集，“波”是只具有正负交替的波动性，直流分量为0。
- 小波概念：是定义在有限间隔而且其平均值为零的一种函数。



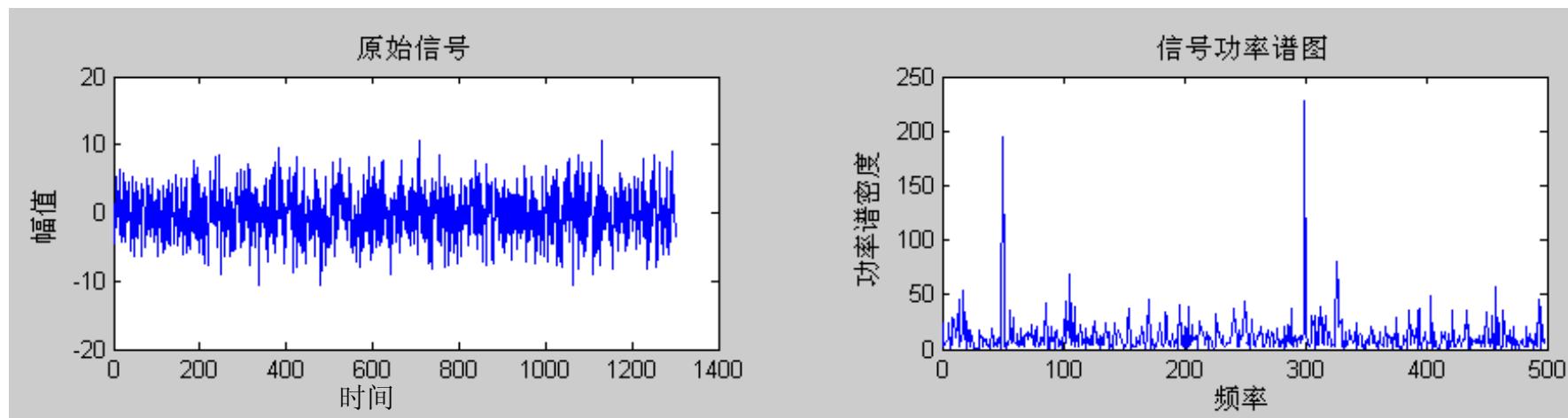
傅里叶变换

- 傅里叶变换：对于时域的常量函数，在频域将表现为冲击函数，表明具有很好的频域局部化性质。

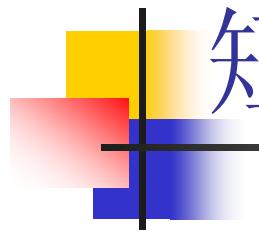
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\omega x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega x} d\omega$$

傅里叶变换



```
x=sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*300*t); %产生50HZ和300HZ的信号  
f=x+3.5*randn(1,length(t)); %在信号中加入白噪声
```



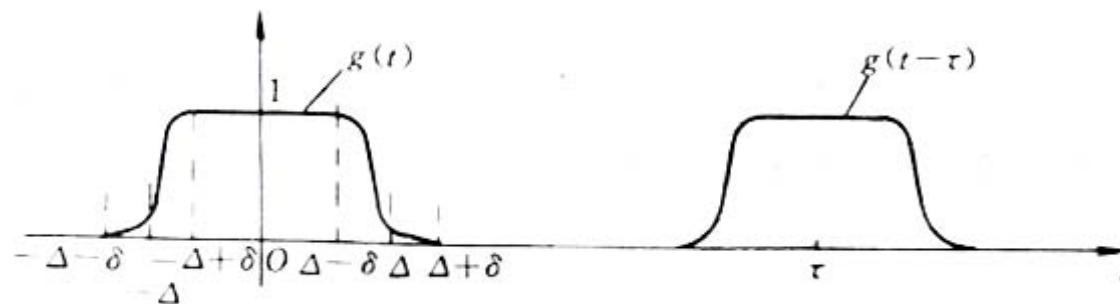
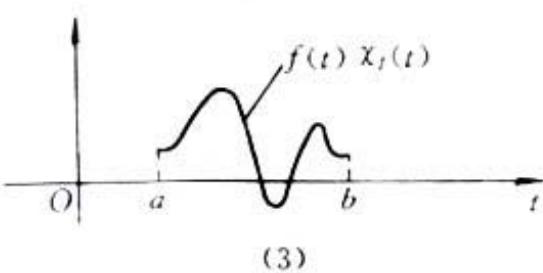
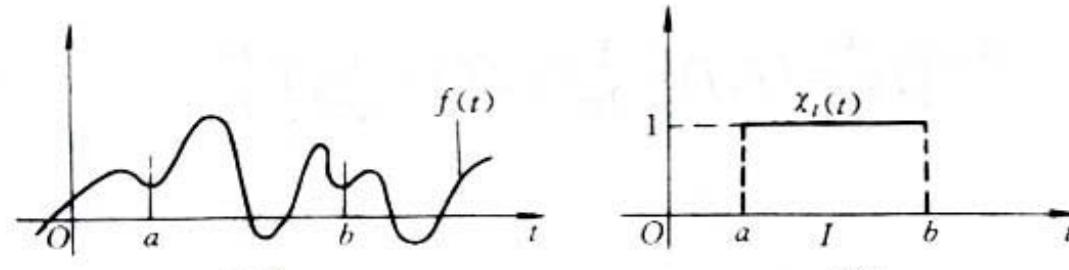
短时傅里叶变换

- 傅立叶变换无法作局部分析，为此，人们提出了短时傅里叶变换（STFT）的概念，即窗口傅里叶变换。
- 基本思想是：把信号划分成许多小的时间间隔，用傅立叶变换分析每一个时间间隔，以便确定该时间间隔存在的频率。
- STFT的处理方法是对信号施加一个滑动窗(反映滑动窗的位置)后，再作傅立叶变换。即：

$$STFT_x(\omega, \tau) = \int x(t) \omega(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

↓ ↓
时限 频限

短时傅里叶变换



Gabor 变换

短时傅里叶变换

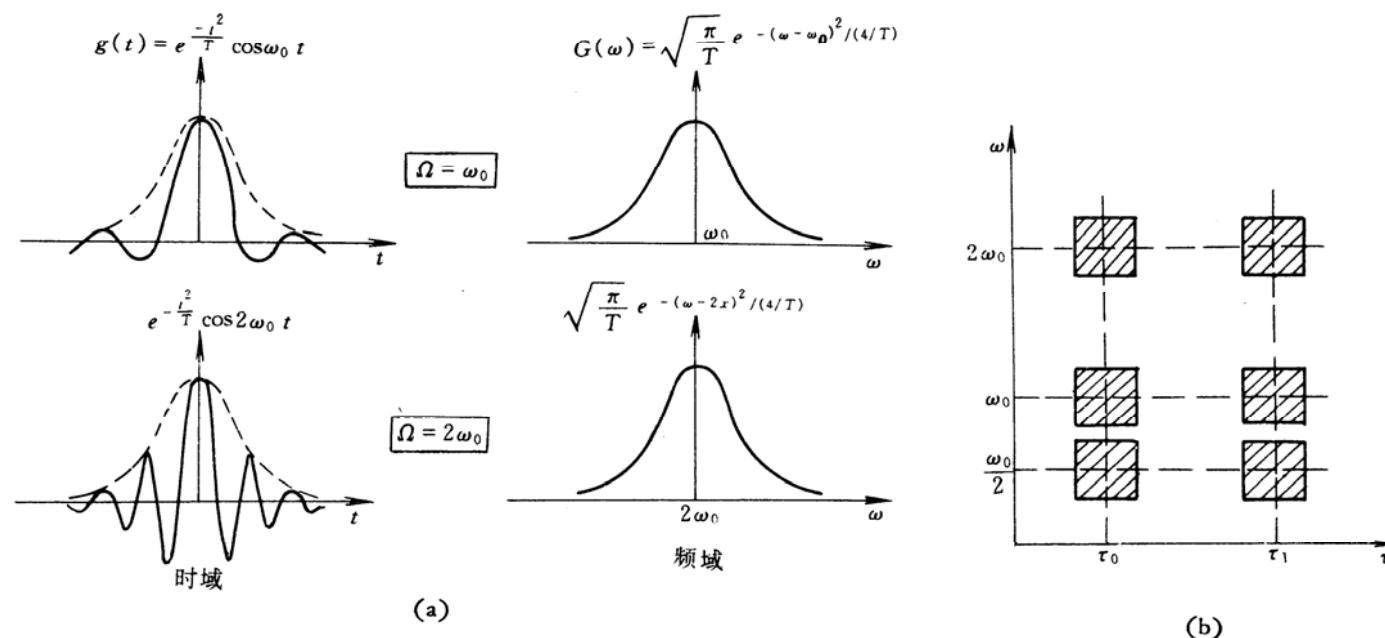
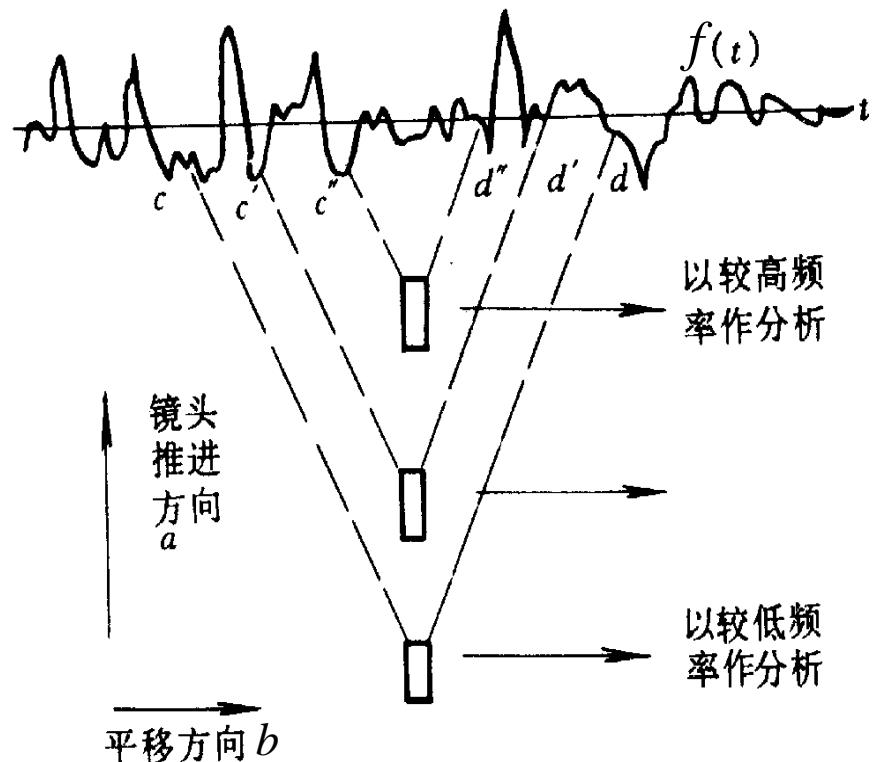


图1 短时傅里叶变换的分析特点
(a) 频率变化的影响 (b) 基本分析单元的特点

连续小波变换的定义

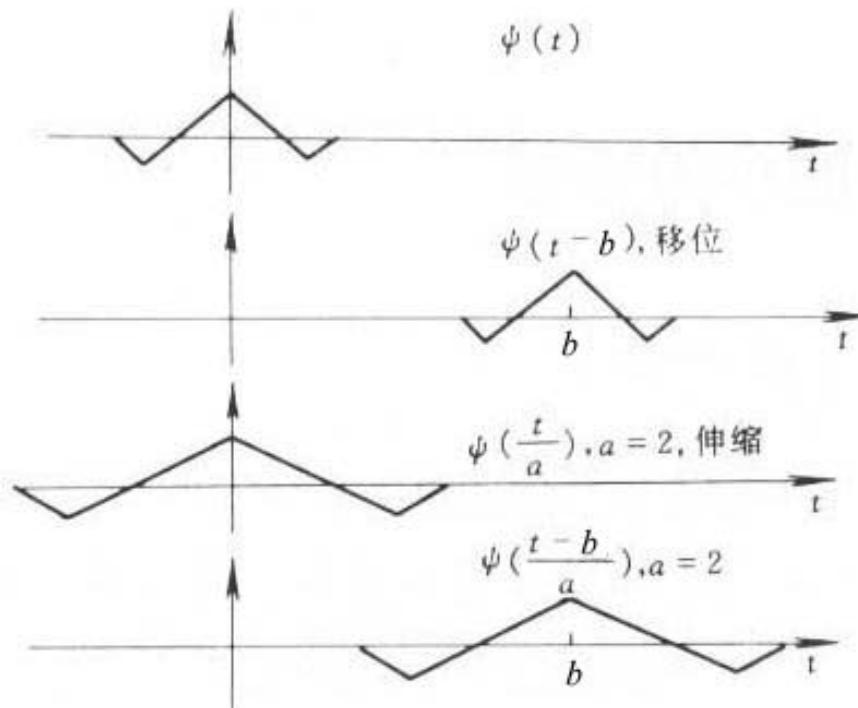
- 用镜头观察目标 $f(t)$ (待分析信号)。
- $\psi(t)$ 代表镜头所起的作用(如滤波或卷积)。
- b 相当于使镜头相对于目标平行移动。
- a 的作用相当于镜头向目标推进或远离。



小波变换的粗略解释

连续小波变换的定义

- 尺度因子 a 的作用是将基本小波 $\psi(t)$ 做伸缩, a 越大 $\psi(\frac{t}{a})$ 越宽。



小波的位移与伸缩

连续小波变换的定义

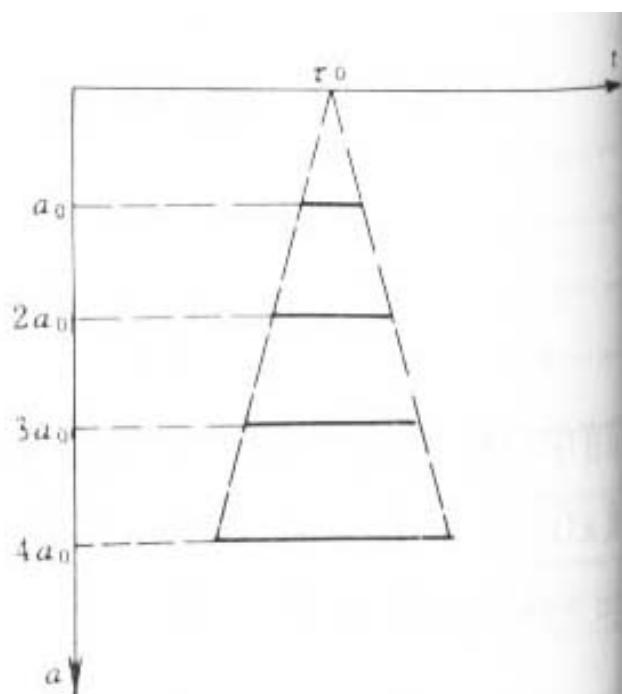


图 1.2 不同 a 值下小波分析区间的变化(即分析小波的持续时间,即分析区间)

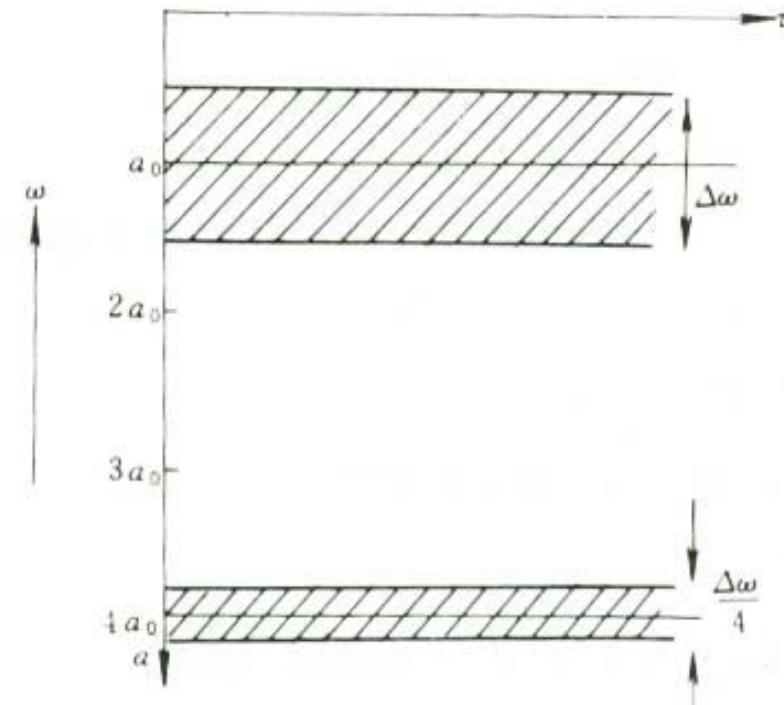
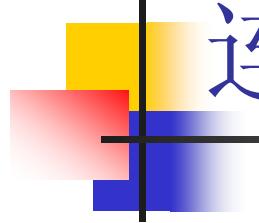


图 1.4 不同 a 值下分析小波频率范围的变化



连续小波变换的定义

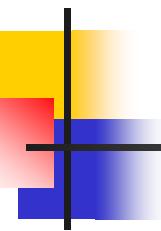
设 $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ，当 $\psi(\omega)$ 满足允许条件时：

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

称 $\psi(t)$ 为一个“基小波”或“母小波”。

小波变换的含义是：

把基本小波(母小波)的函数 $\psi(t)$ 作位移后，再在不同尺度下与待分析信号作内积，就可以得到一个小波序列。



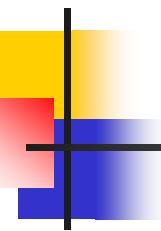
连续情况时，小波序列为：（基本小波的位移与尺度伸缩）

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

其中 a 为尺度参量, b 为平移参量。

离散的情况，小波序列为：

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

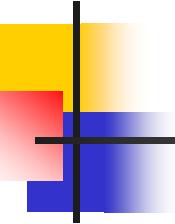


根据容许条件要求，当 $\omega=0$ 时，为使被积函数是有效值，必须有 $\hat{\psi}(0)=0$ ，所以可得到上式的等价条件为：

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

此式表明 $\psi(t)$ 中不含直流，只含有交流，即具有震荡性，故称为“波”，为了使 $\psi(t)$ 具有局部性，即在有限的区间之外很快衰减为零，还必须加上一个衰减条件：

$$|\psi(t)| \leq \frac{c}{(1+|t|)^{1+\varepsilon}}, \varepsilon > 0, c > 0$$



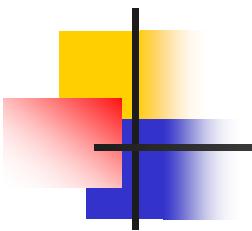
衰减条件要求小波具有局部性，这种局部性称为“小”，所以称为小波。

对于任意的函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的连续小波变换定义为：

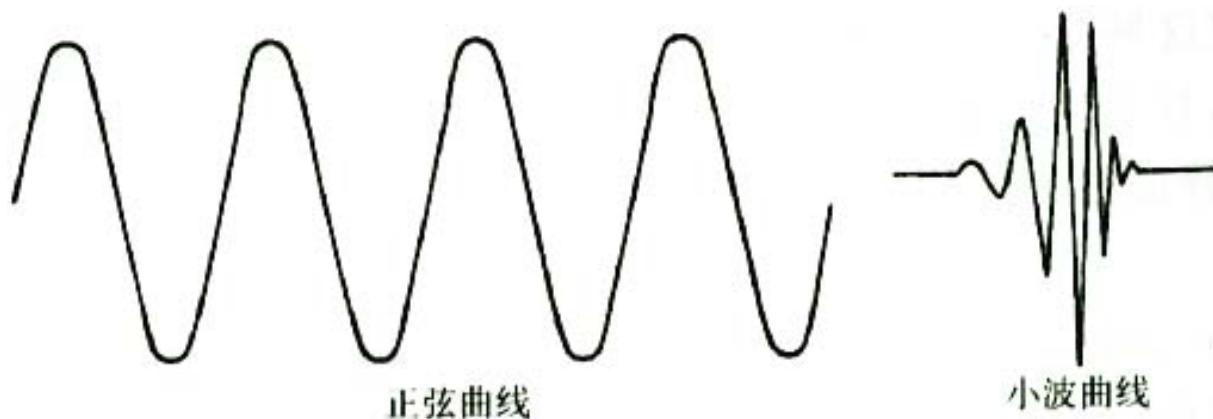
$$w_f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$$

逆变换为：
$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} W_f(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db$$

a 是尺度因子， b 反映位移。

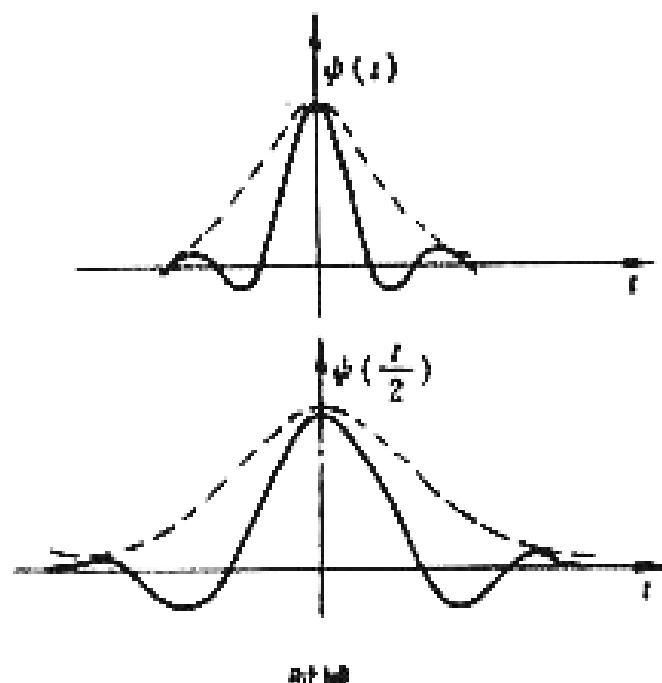
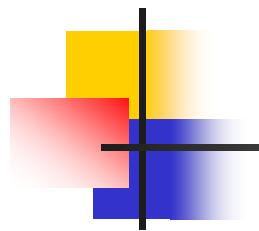

$$\text{内积: } \langle x(t), \psi(t-b) \rangle = \int x(t) \overline{\psi(t-b)} dt$$

$$\begin{aligned}\text{卷积: } \langle x(t) * \psi(t) \rangle &= \int x(b) \overline{\psi(t-b)} db \\ &= \int x(t) \overline{\psi(b-t)} dt\end{aligned}$$



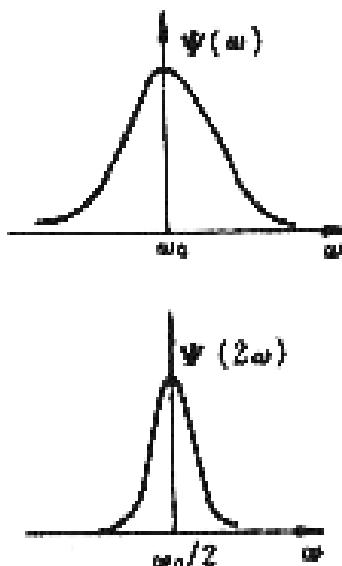
持续宽度相同

振荡波



$a = 1$

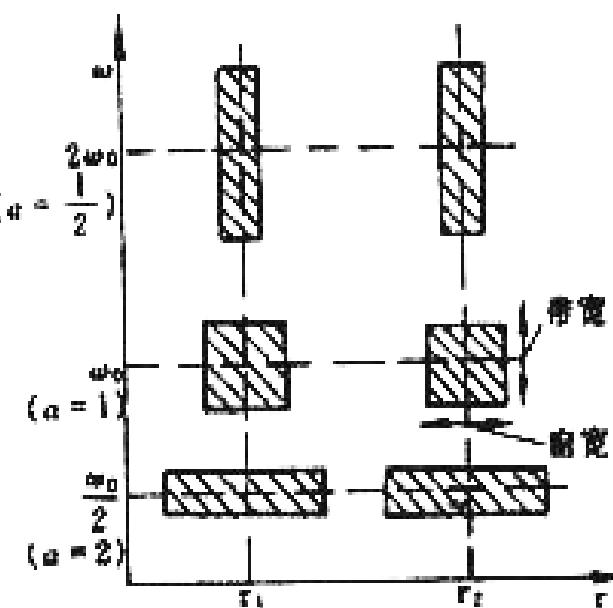
$a = 2$



$a = 1$

$a = 2$

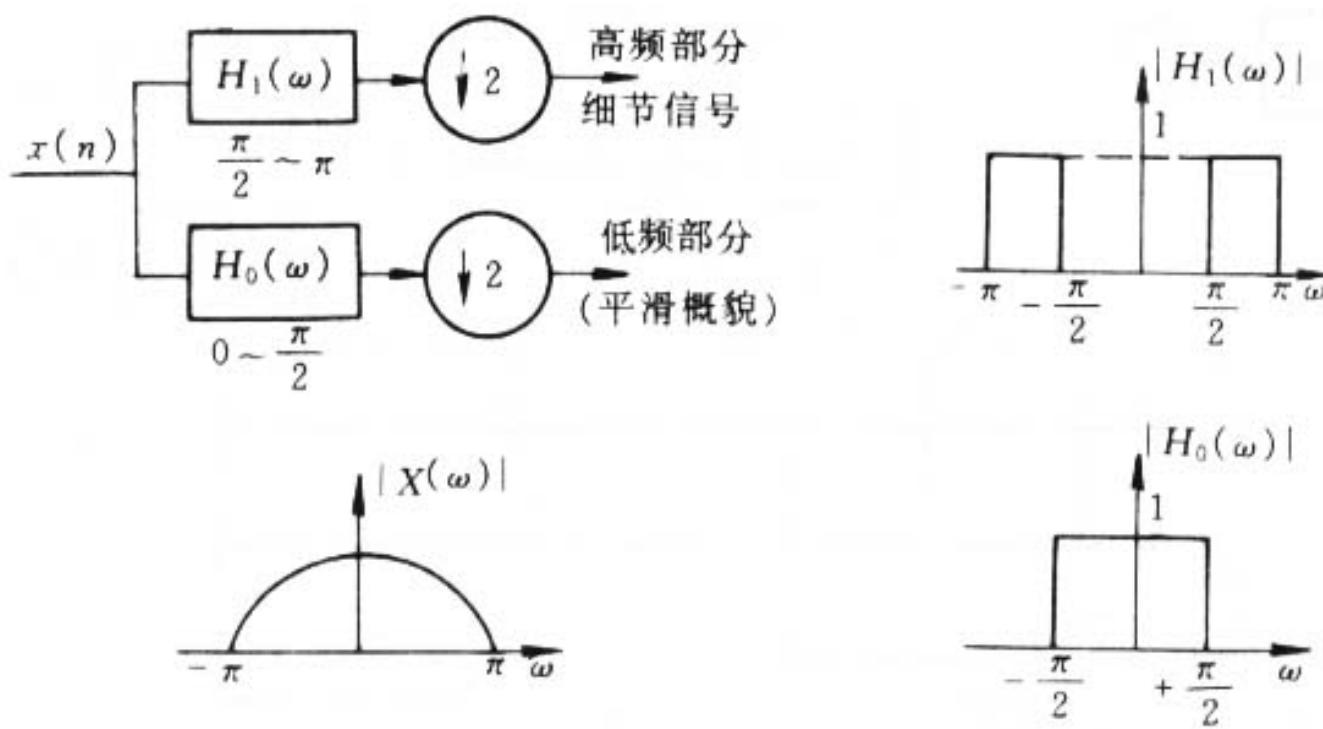
频域



(b)

小波变换的多分辨分析特性

多分辨分析是小波分析中最重要的概念之一，它将一个函数表示为一个低频成分与不同分辨率下的高频成分，并且多分辨分析能提供一种构造小波的统一框架，提供函数分解与重构的快速算法。

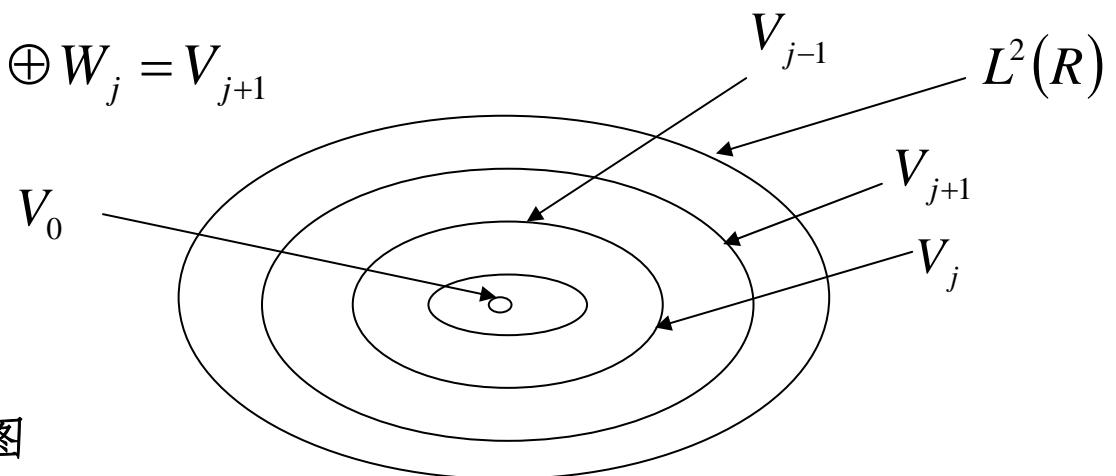


$L^2(R)$ 是一个无限维向量空间，称为平方可积空间，将 $L^2(R)$ 用它的子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 表示，其中 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 称为尺度空间， $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 称为小波空间。

尺度空间的递归嵌套关系： $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$

小波空间 W_j 是 V_j 和 V_{j+1} 之间的差，即 $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ ，它捕捉由 V_j 逼近 V_{j+1} 时丢失的信息。推出：

$$V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_j = V_{j+1}$$



多分辨率的空间关系图

两尺度方程

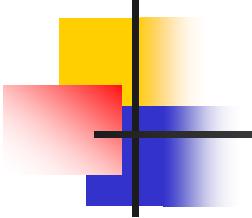
若 ϕ 是尺度函数，它生成 $L^2(R)$ 的多分辨分析 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ，则必然存在系数序列 $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ，使得以下尺度关系成立：

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k)$$

这就是两尺度方程。

定义函数 $\phi(t) \in L^2(R)$ 为尺度函数，若其经过整数平移 k 和尺度 j 上的伸缩，得到一个尺度和位移均可变化的函数集合：

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{-j}{2}} \phi(2^{-j}t - k)$$



$\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 的基本性质是二尺度差分方程：

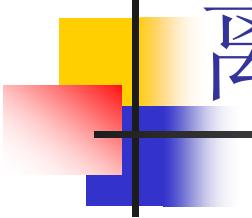
$$\phi(2^{-j}t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2^{-j+1}t - k) \quad \sum_n h_k = \sqrt{2}$$

$$\psi(2^{-j}t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2^{-j+1}t - k)$$

二尺度方程的频域表示为

$$\sqrt{2}\phi(2\omega) = H(\omega)\phi(\omega)$$

$$\sqrt{2}\psi(2\omega) = G(\omega)\phi(\omega)$$



离散小波变换

- 如果设定 $a = 2^{-j}, b = k2^{-j}, j, k \in \mathbb{Z}$ ， 则

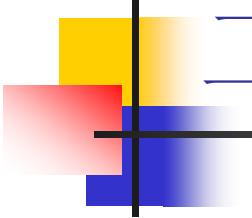
$$\psi_{2^{-j}, k2^{-j}}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z}$$

- 对于任意函数 $f(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ ， 定义相应的离散小波变换为：

$$WT_f(j, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

- 如果这时 $\psi_{j,k}$ 构成空间 $L^2(-\infty, +\infty)$ 的一组规范正交基， 对于任一的函数 $f(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ 的反演式为一展开式：

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} WT_f(j, k) \psi_{j,k}$$



二进小波及二进小波变换

- 在连续小波变换中，令参数 $a=2^j, j \in \mathbb{Z}$ ，而参数 b 仍取连续值，则有二进小波：

$$\psi_{2^j, b}(t) = 2^{-j/2} \psi[2^{-j}(t-b)]$$

- 这时， $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 的二进小波变换定义为

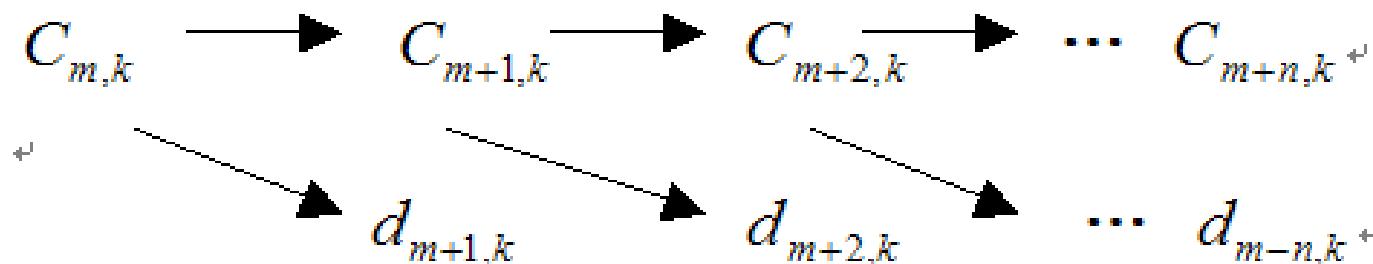
$$WT_f(2^j, b) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*[2^{-j}(t-b)] dt$$

Mallat算法与塔式分解

系数分解的快速算法：

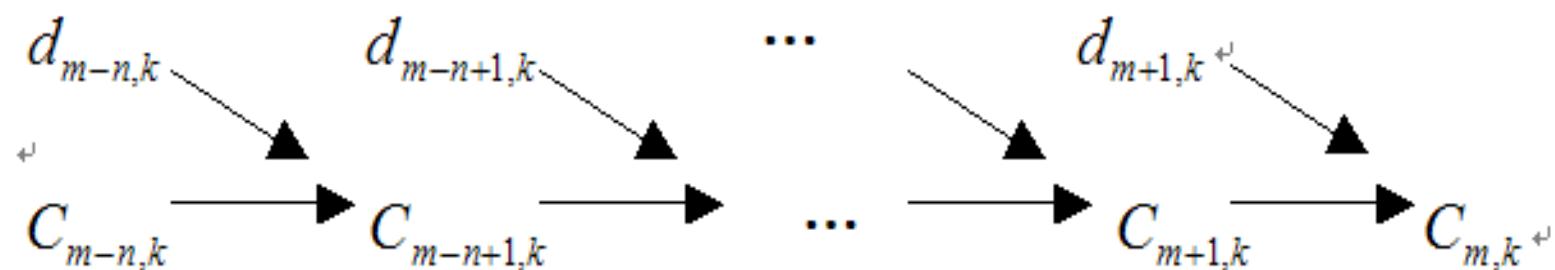
$$C_{j,k} = \sum_m h(m-2k)C_{j-1,m}$$

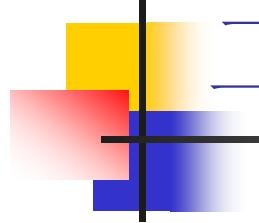
$$d_{j,k} = \sum_m g(m-2k)d_{j-1,m}$$



系数重构的快速算法：

$$C_{j-1,k} = \sum_m C_{j,m} h(m-2k) + \sum_m d_{j-1,m} g(m-2k)$$





二维图像的小波变换实现

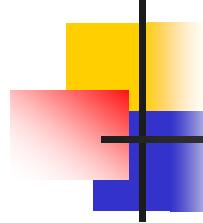
- 假定二维尺度函数可分离，则有
$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$
- 其中 $\varphi(x)$ 、 $\varphi(y)$ 是两个一维尺度函数。若 $\psi(x)$ 是相应的小波，那么下列三个二维基本小波：

$$\psi_{(x,y)}^1 = \varphi(x)\psi(y)$$

$$\psi_{(x,y)}^2 = \psi(x)\varphi(y)$$

$$\psi_{(x,y)}^3 = \psi(x)\psi(y)$$

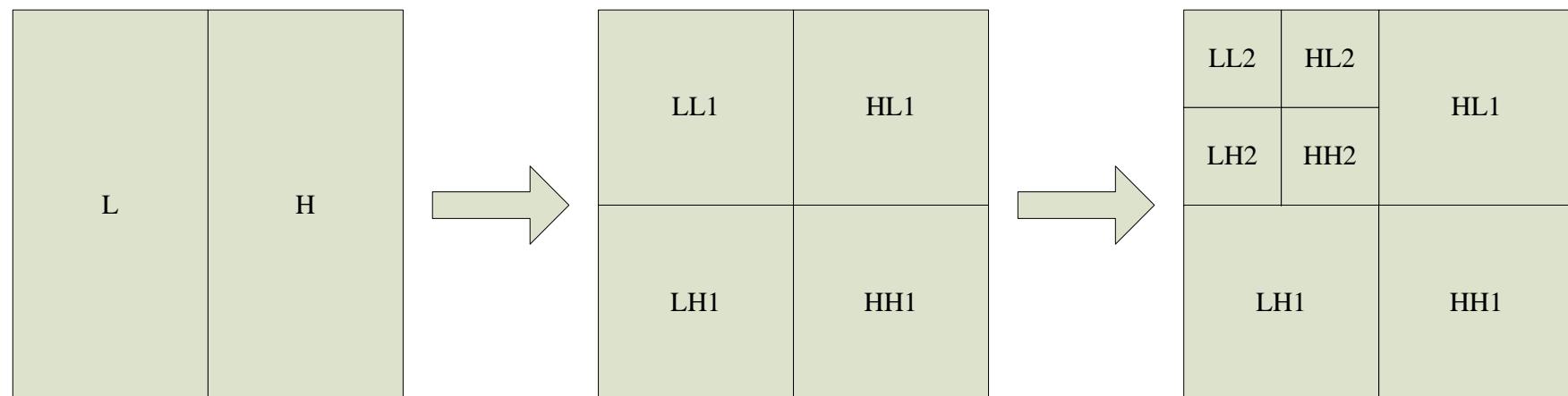
与 $\varphi(x, y)$ 一起就建立了二维小波变换的基础。

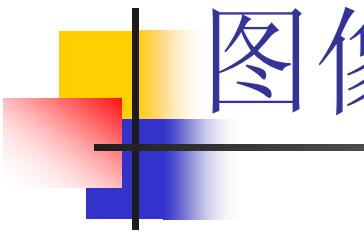


图像的小波变换实现

1. 正变换

图像小波分解的正变换可以依据二维小波变换按如下方式扩展，在变换的每一层次，图像都被分解为4个四分之一大小的图像。





图像的小波变换实现

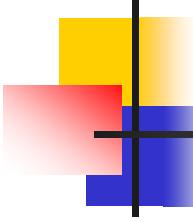
- 在每一层，四个图像中的每一个都是由原图像与一个小波基图像的内积后再经过在 x 和 y 方向都进行二倍的间隔抽样而生成。对于第一个层次($j=1$)可写成：

$$A_2^0(m, n) = \langle A_1^0(x, y), \varphi(x - 2m, y - 2n) \rangle$$

$$D_2^1(m, n) = \langle A_1^0(x, y), \psi^1(x - 2m, y - 2n) \rangle$$

$$D_2^2(m, n) = \langle A_1^0(x, y), \psi^2(x - 2m, y - 2n) \rangle$$

$$D_2^3(m, n) = \langle A_1^0(x, y), \psi^3(x - 2m, y - 2n) \rangle$$



图像的小波变换实现

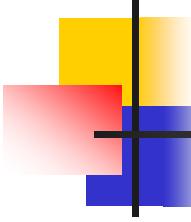
将上式内积改写成卷积形式，则得到离散小波变换的Mallat算法的通用公式：

$$A_{2^{j+1}}^0(m, n) = \sum_{x, y} A_{2^j}^0(x, y) h(x - 2m) h(y - 2n)$$

$$D_{2^{j+1}}^1(m, n) = \sum_{x, y} A_{2^j}^0(x, y) h(x - 2m) g(y - 2n)$$

$$D_{2^{j+1}}^2(m, n) = \sum_{x, y} A_{2^j}^0(x, y) g(x - 2m) h(y - 2n)$$

$$D_{2^{j+1}}^3(m, n) = \sum_{x, y} A_{2^j}^0(x, y) g(x - 2m) g(y - 2n)$$

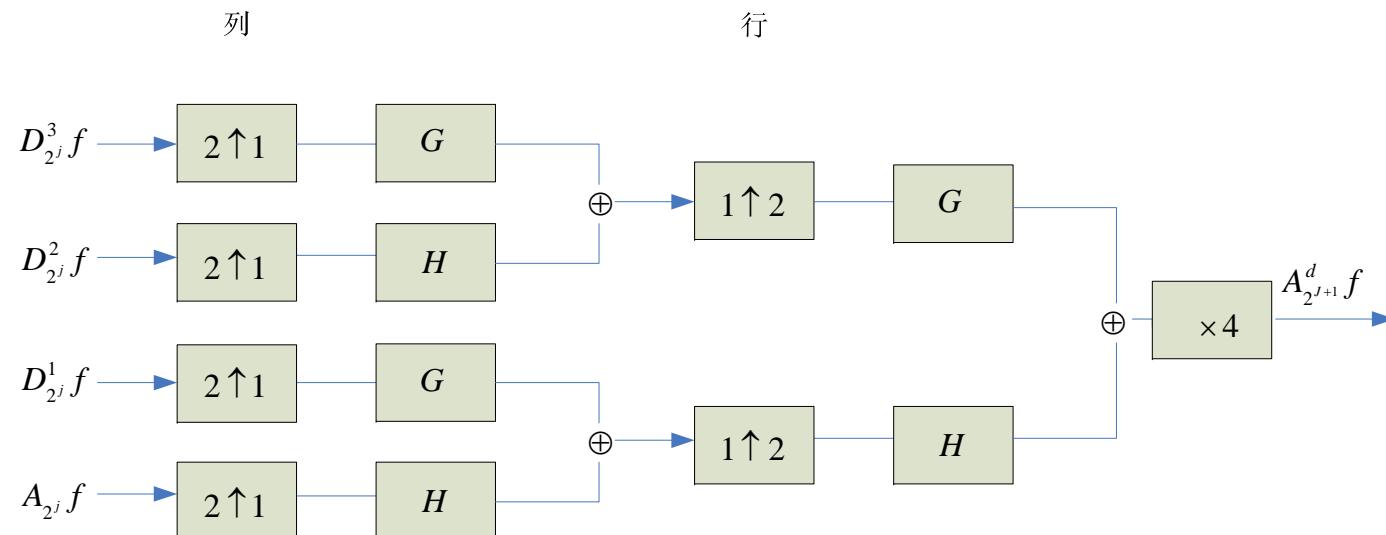
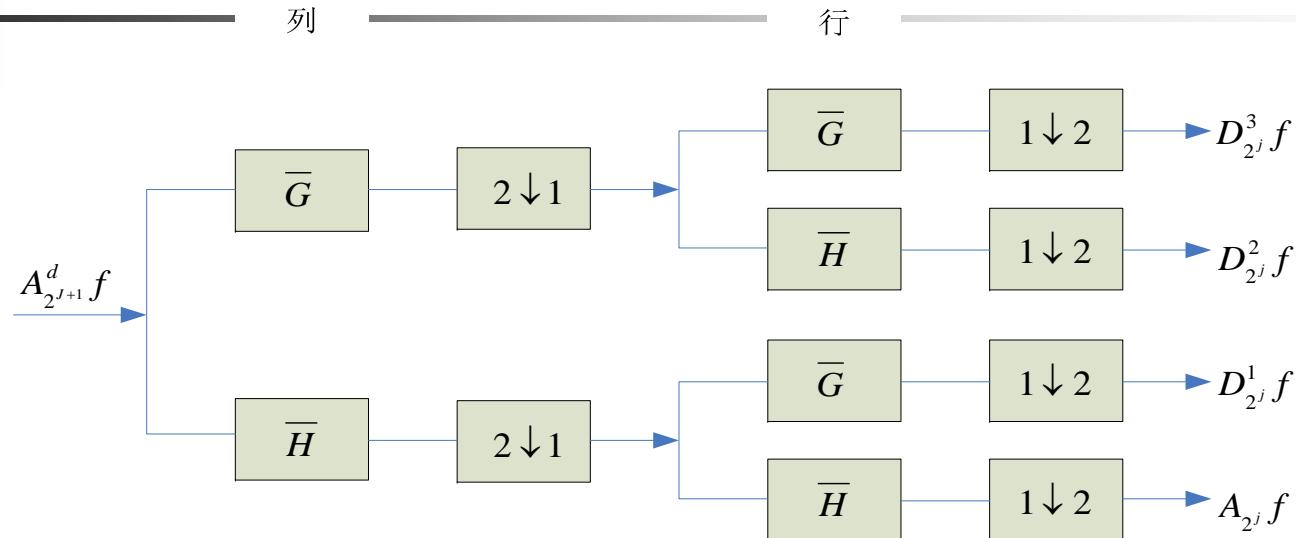
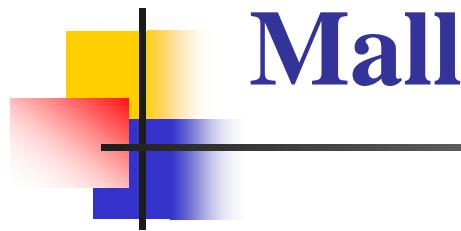


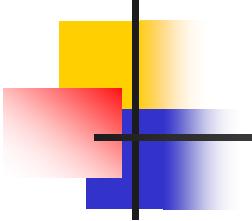
图像的小波变换实现

2. 逆变换

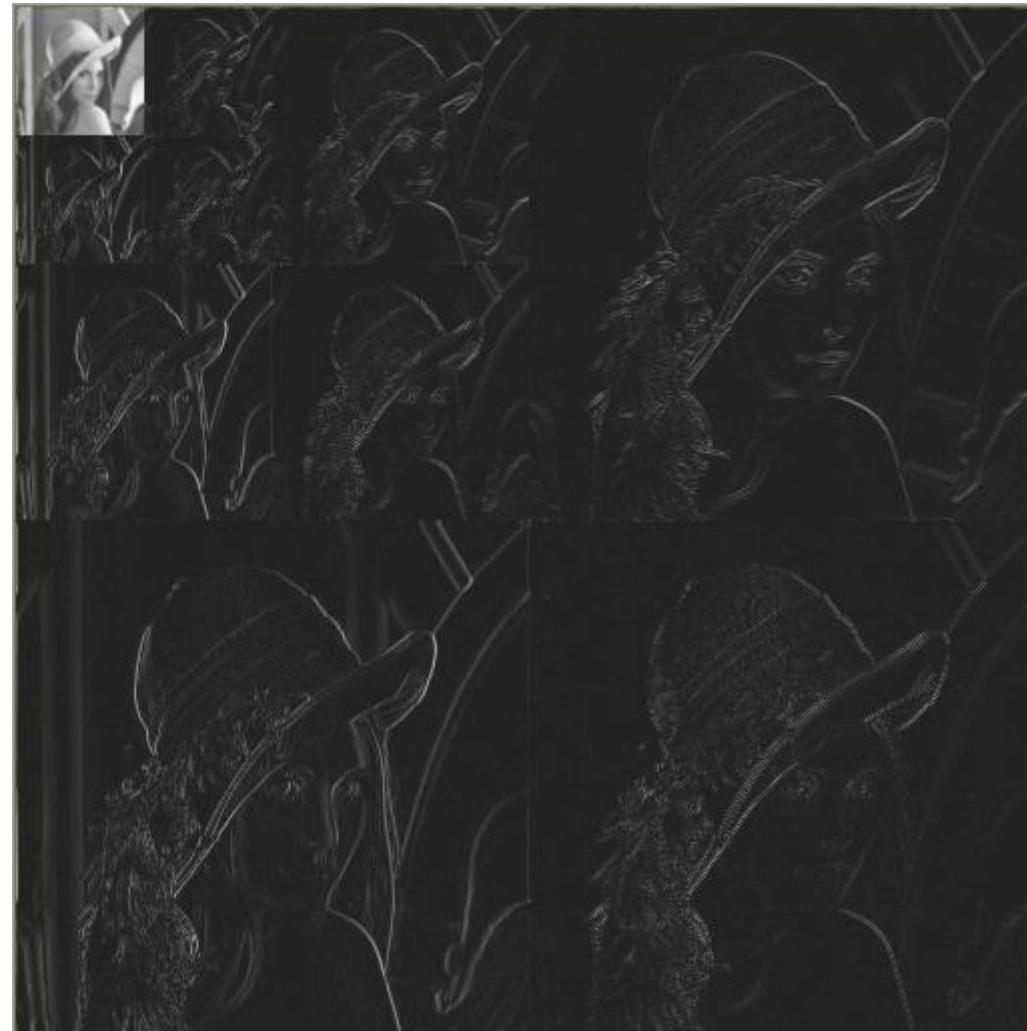
- 在每一层(如最后一层)都通过在每一列的左边插入一列零来增频采样前一层的4个阵列(即4个分解图像);
- 接着用重构低通滤波器 h 和重构高通滤波器 g 来卷积各行, 再成对地把这几个的阵列加起来;
- 然后通过在每行上面再插入一列零来将刚才所得两个阵列(图像)的大小增频采样为 $N \times N$;
- 再用 h 和 g 与这两个阵列的每列进行卷积。这两个阵列的和就是这一层次重建的结果。

Mallat二维多分辨率分解与重构





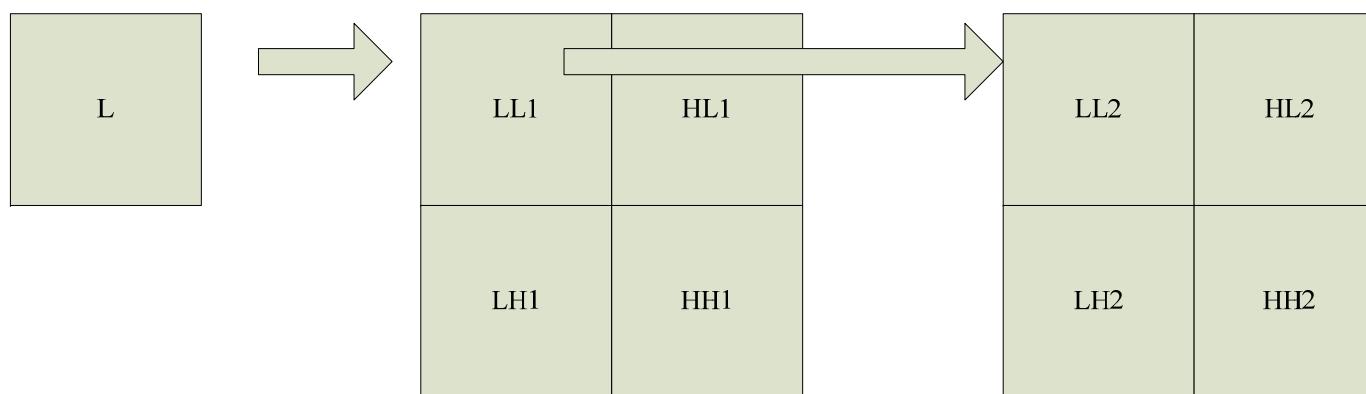
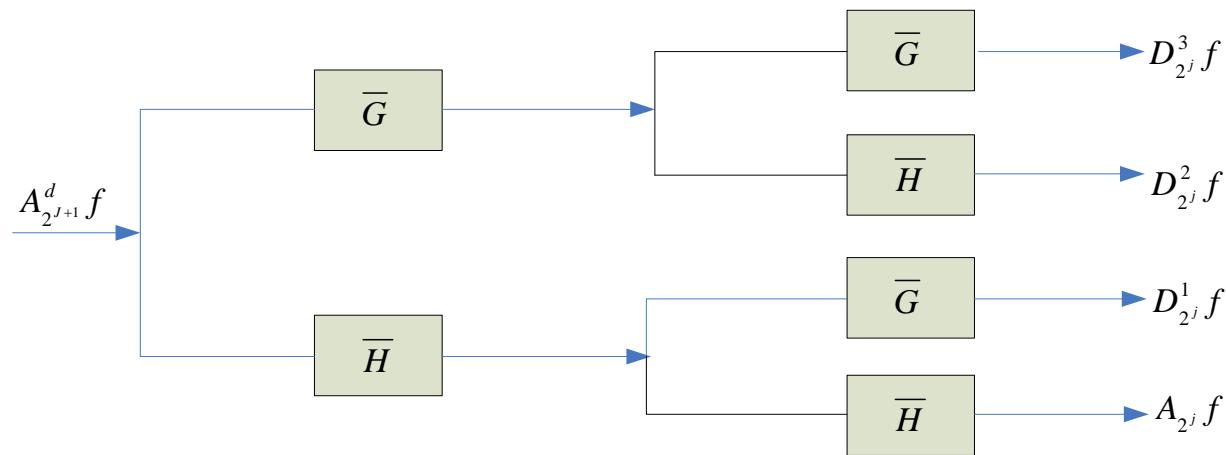
Mallat 快速塔式分解



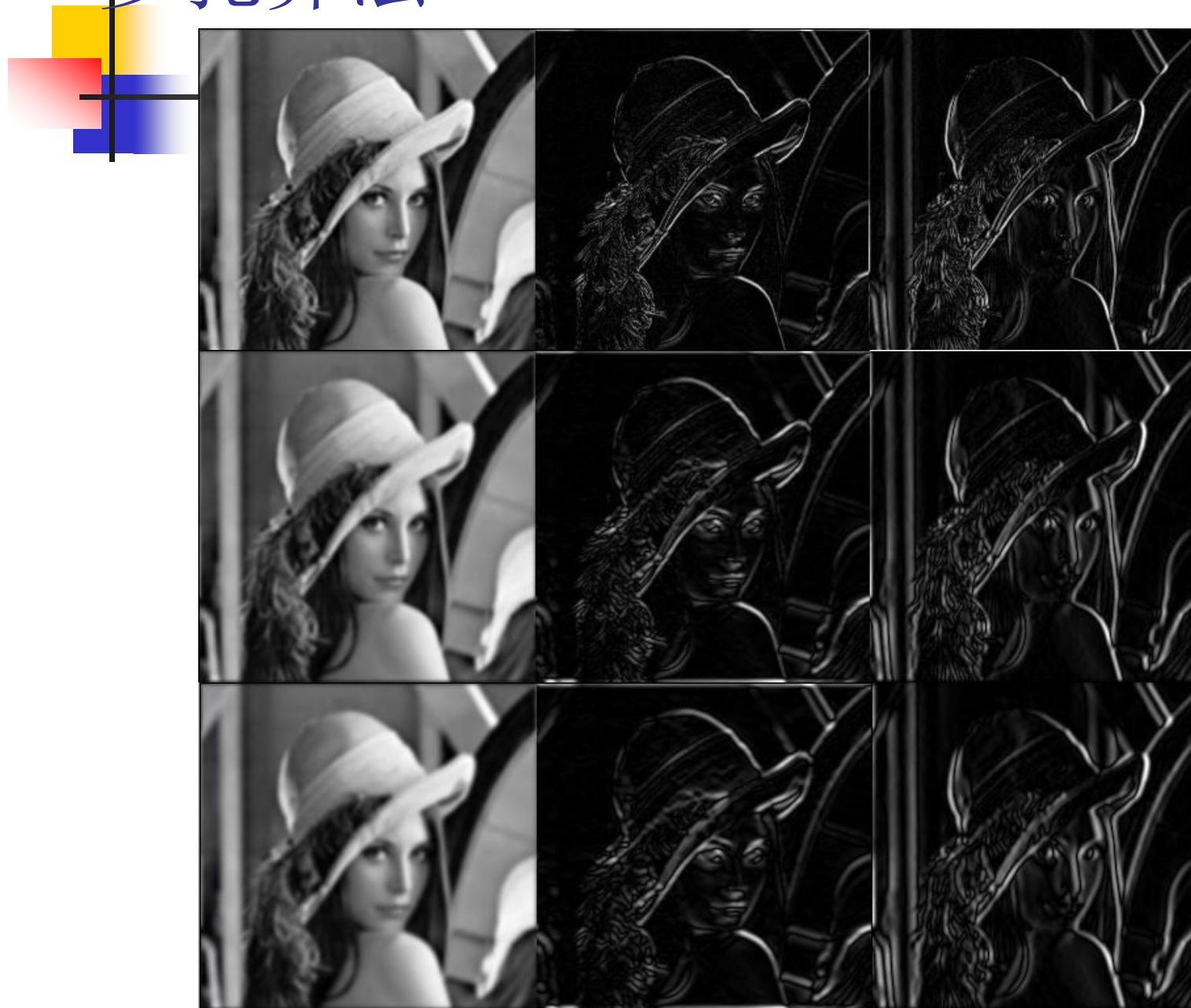
多孔算法

列

行



多孔算法



4.2 基于小波分析的图像边缘检测方法

边缘像素实质上是局部图像范围内灰度的急剧变化点(奇异点)，图像边缘就是二维图像中奇异点的集合。边缘点在频域表现为高频信号，而图像噪声也多为高频信号，这使得两者难以区分。边缘检测的目的就是既要将高频信号从图像中分离出来，又要区分边缘与噪声，准确地标定边缘的位置。

4.2 基于小波分析的图像边缘检测方法

- 小波多尺度局部模极大值边缘检测的原理
- 小波多分辨率边缘检测的具体实现
- 小波函数的选取
- 自适应阈值的选取
- 利用边缘信息进行目标定位
- 仿真实验

小波多尺度局部模极大值边缘检测的原理

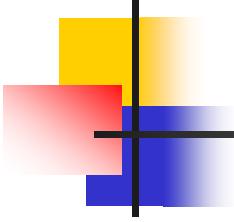
假设 $\theta(x, y)$ 是二维平滑函数，且满足 $\iint \theta(x, y) dx dy \neq 0$ ，可把它沿 x, y 两个方向上的导数作为基本小波：

$$\Psi^{(1)}(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \quad \Psi^{(2)}(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y}$$

$$\Psi_a^{(1)}(x, y) = \frac{1}{a^2} \Psi^{(1)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \quad \Psi_a^{(2)}(x, y) = \frac{1}{a^2} \Psi^{(2)}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$$

对于一幅图像 $f(x, y)$ ，其小波变换为

$$\begin{bmatrix} W_t^{(1)} f(2^j, x, y) \\ W_t^{(2)} f(2^j, x, y) \end{bmatrix} = 2^j \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y) * \theta_a(x, y)] \\ \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) * \theta_a(x, y)] \end{bmatrix} = 2^j \text{grad} [f(x, y) * \theta_a(x, y)]$$



整个图像的二进小波变换即矢量：

$$\begin{bmatrix} W_T^{(1)} f(2^j, x, y) \\ W_T^{(2)} f(2^j, x, y) \end{bmatrix} = W_T f(2^j, x, y)$$

模值为：

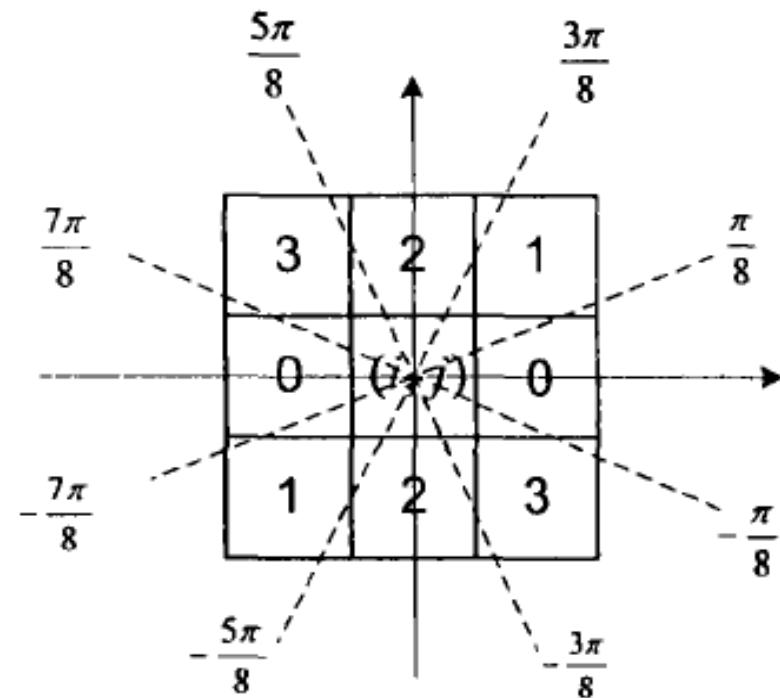
$$\sqrt{\left| W_T^{(1)} f(2^j, x, y) \right|^2 + \left| W_T^{(2)} f(2^j, x, y) \right|^2}$$

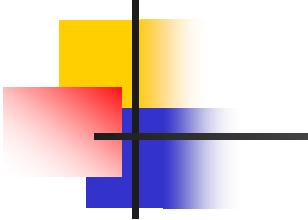
相角为：

$$Af_{2^j}(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\left| W_T^{(2)} f(2^j, x, y) \right|}{\left| W_T^{(1)} f(2^j, x, y) \right|}$$

小波多分辨率边缘检测的具体实现

搜寻模极大值:





噪声的滤除

(1) 阈值法

硬阈值, 软阈值, 自适应阈值;

(2) 多分辨率分割

利用模极大值在各个尺度的传播特性去除噪声;

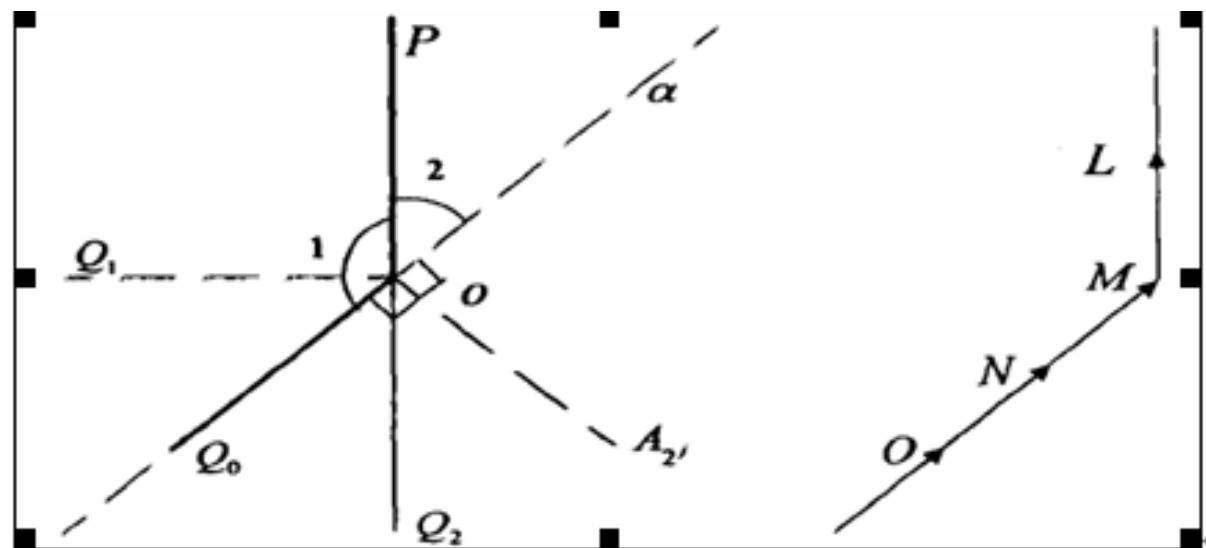
利用小波变换尺度间相关性去除噪声;

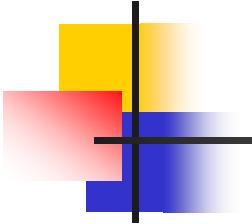
平移不变量的小波去噪方法;

边缘点的链接

边缘跟踪算法的四个约束条件：

- a) “方向不变性”原则； b) 角度平滑条件；
- c) 幅值最邻近条件； d) “互认”原则。





三种小波多尺度局部模极大值 边缘检测方法的比较

方法一：小波变换模极大值用于边缘检测的原始方法

具体步骤：

① 利用多孔算法对原图像 $f(x, y)$ 进行保持图像大小不变的小波变换，生成水平分量 $W_T^h f(2^j, x, y)$ 和垂直分量 $W_T^v f(2^j, x, y)$ ；

② 计算出梯度向量的模值

$$\sqrt{\left|W_T^h f(2^j, x, y)\right|^2 + \left|W_T^v f(2^j, x, y)\right|^2}$$

③ 计算出梯度向量的相角

$$Af_{2^j}(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\left|W_T^v f(2^j, x, y)\right|}{\left|W_T^h f(2^j, x, y)\right|}$$

⑤ 按照相角量化方法划分为8个方向，求出不同方向的局部模极大值点；

⑥ 对各尺度的边缘图像进行阈值处理；

⑦ 链化模极大值点，去除长度小于一定阈值的边缘链，就得到各个尺度上的边缘图像。

方法二：

小波变换模极大值用于边缘检测的简化方法

具体步骤：

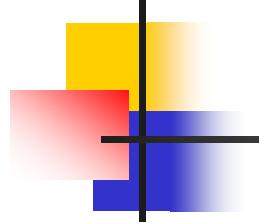
- ①对所给图像的每一行进行小波变换，求出 $W_T^{(1)} f(2^j, x, y)$ ；
- ②对所给图像的每一列进行小波变换，求出 $W_T^{(2)} f(2^j, x, y)$ ；
- ③计算出梯度向量的模值 $\sqrt{\left|W_T^{(1)} f(2^j, x, y)\right|^2 + \left|W_T^{(2)} f(2^j, x, y)\right|^2}$
- ④计算出梯度向量的相角 $Af_{2^j}(x, y) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\left|W_T^{(2)} f(2^j, x, y)\right|^2}{\left|W_T^{(1)} f(2^j, x, y)\right|^2}$
- ⑤将相角 $Af_{2^j}(x, y)$ 按8方向量化，求出 $Mf_{2^j}(x, y)$ 在不同方向的局部模极大值点；
- ⑥对各尺度的边缘图像进行阈值处理；
- ⑦链化模极大值点，去除长度小于一定阈值的边缘链，就得到各个尺度上的边缘图像。

方法三：

小波变换模极大值用于边缘检测的多尺度综合方法

具体步骤：

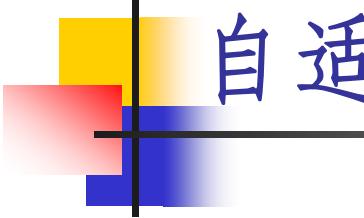
- ①求出各尺度的模图像簇 $Mf(x, y)$ 和相角图像簇 $Af(x, y)$ ；
- ②对各尺度的边缘图像进行阈值处理；
- ③将相角 $Af_{2^j}(x, y)$ 按8方向量化，求出 $Mf_{2^j}(x, y)$ 在不同方向的局部模极大值点；
- ④由粗到细的边缘链接：对经过阈值处理的最粗分辨率级上的模极大值开始，链接模极大值图像中模值相近，相角相似的非零像素点，删除长度小于链长阈值的边缘链，得到大尺度下单像素宽的图像边缘 $E_{2^j}(x, y)$ ；



⑤针对尺度 j 的每一个边缘像素，搜索 $j-1$ 尺度下以这点为中心的 3×3 邻域，将该邻域内出现的所有可能边缘点均标记为候选边缘点，得到 j 尺度下的候选边缘点图像 $H^{j-1}(x, y)$ ，非候选边缘点标记为零；

⑥将 $j-1$ 尺度下的候选边缘点图像 $H^{j-1}(x, y)$ 中模值相近，相角相似的非零像素点链接，删除长度小于阈值的边缘链，得到 $j-1$ 尺度下单像素宽的图像边缘 $E_{2^{j-1}}(x, y)$ ；

⑦重复步骤⑤，⑥，直到 $j=1$ 为止，边缘图像即为综合后形成的边缘图像，也就是我们最终所要得到的边缘图像。

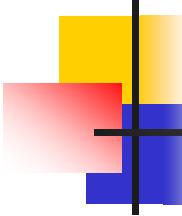


自适应阈值选取

选择一个窗口在小波系数上滑动，窗口大小可以取 32×32 或 16×16 ，将尺度下小于阈值 T_0 的梯度值置为 0，自适应阈值为：

$$T_n = T_0 + \frac{\alpha_0}{N} \sum_{i,j} Mf_{i,j}$$

其中， T_0 为阈值初值， α_0 为比例系数， N 为采样点数。根据 T_0 和 α_0 的大小来决定窗口内均值对阈值的作用。

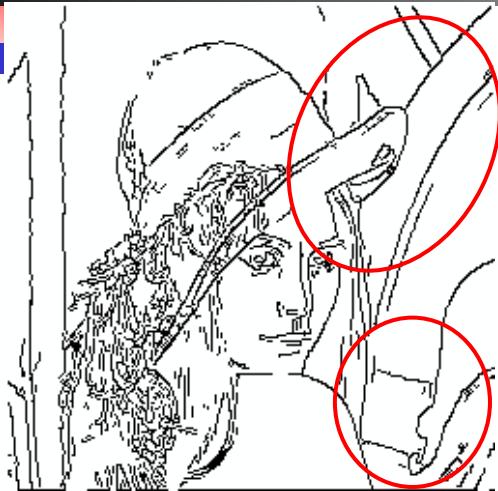


利用边缘信息进行目标定位

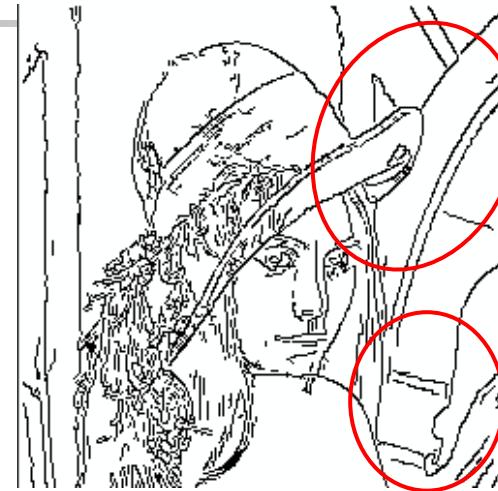
对经过综合后得出的图像边缘，根据形心公式就可以计算出图像的形心坐标，判断出目标在视场中的位置，实现目标定位。

$$x = \frac{\sum_{j=1}^M j \sum_{k=1}^N f(j, k)}{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M f(j, k)}$$
$$y = \frac{\sum_{k=1}^N k \sum_{j=1}^M f(j, k)}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N f(j, k)} \quad j = 1 \cdots M, k = 1 \cdots N$$

实验一：阈值的选取对边缘检测结果影响的实验



用固定阈值在一阶尺度提取的边缘



用自适应阈值在一阶尺度提取的边缘



用固定阈值在二阶尺度提取的边缘

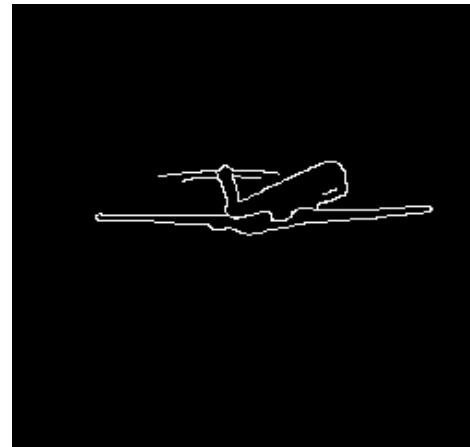


用自适应阈值在二阶尺度提取的边缘

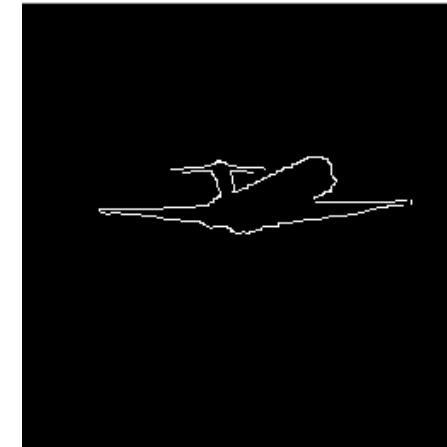
实验三：基于二次B样条小波的边缘检测实验



原始图像



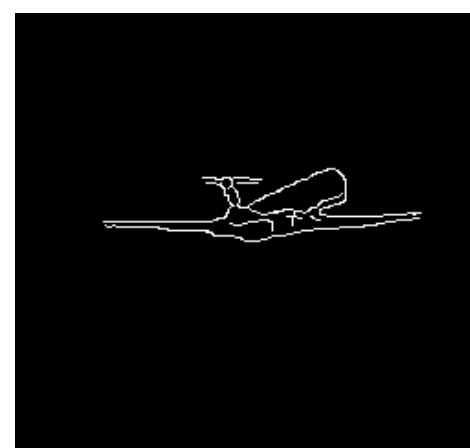
多尺度边缘检测的图像边缘



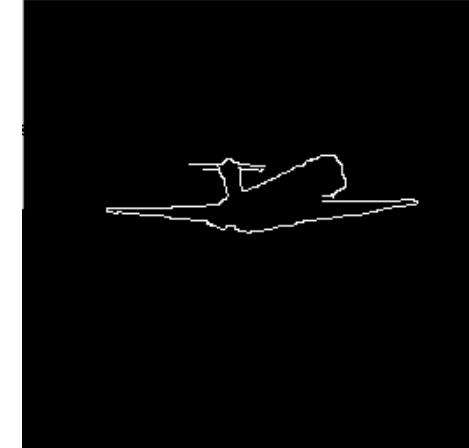
图像增强后检测出的图像边缘



降低对比度后的图像



多尺度边缘检测的图像边缘



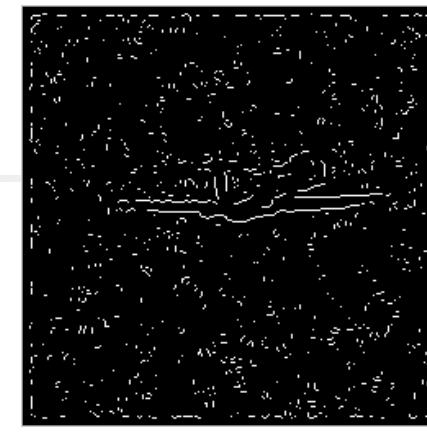
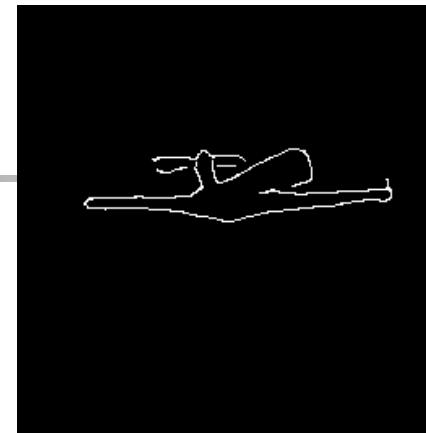
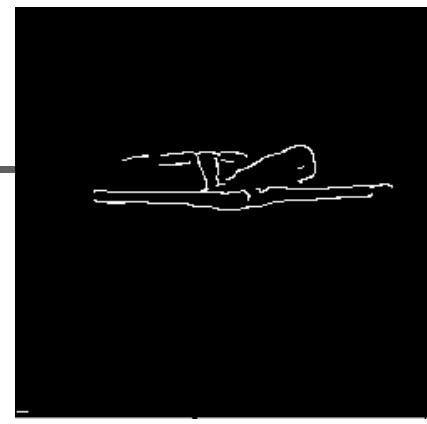
图像增强后检测出的图像边缘

实验二：三种模极大值边缘检测方法的性能比较

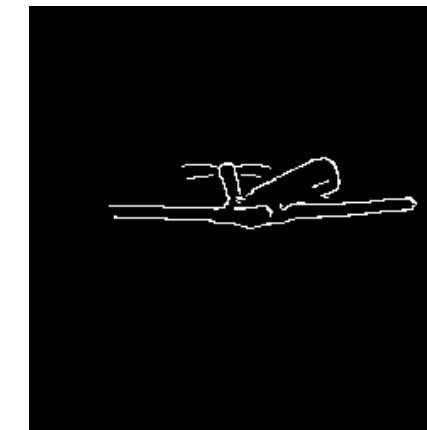
	边缘检测效果	抑制噪声能力 (加入均值为0,方差为 0.001的高斯噪声)	计算量
模极大值边缘检测的简化方法	相对最差	抑制噪声能力最弱	最小
模极大值边缘检测的原始算法	相对较好	抑制噪声能力较强	稍大
模极大值边缘检测多尺度综合法	效果最好	抑制噪声能力最强	最大

实验四：基于三次B样条小波的边缘检测实验

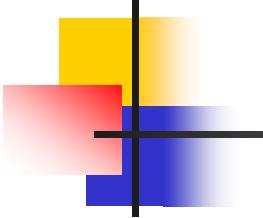
	抑制噪声方面 (加入均值为0, 方差为0.001的高斯噪声)	提取边缘能力方面 (对比度为2%的低对比度边缘)	计算量方面(基于双DSP平台)
Roberts	最差, 无法分离边缘与噪声	最差, 边缘定位不准确	1.34ms
Sobel	性能优于Roberts	优于Roberts	1.62ms
拉普拉斯 高斯算子	优于Roberts和Sobel, 能部分检测出边缘	效果优于Roberts 和Sobel	2.69ms
小波模极大值方法	优于上面三种方法, 能检测出主要边缘	很好, 少部分提取的不准确	18.9ms
小波多尺度综合方法	效果最好, 检测出的边缘受噪声影响很小	最好, 几乎能提取出全部微弱边缘信息	59.2ms



加入高斯噪声后的图像 多尺度边缘检测的图像边缘 图像增强后检测出的图像
边缘 拉普拉斯高斯算子检测的边缘

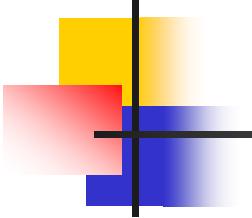


模糊后的图像 多尺度边缘检测的图像边缘 图像增强后检测出的图像边缘 拉
普拉斯高斯算子检测的边缘



小 结

- 由于小波变换具有多分辨分析特性和时频局部化能力，在边缘检测、去噪和图像增强等方面都具有很强的优势；
- 更适合用来检测受噪声污染严重的模糊图像和低对比度图像，尤其对微弱目标，它首先能抑制噪声、增强对比度，然后利用多尺度的模极大值方法有效检测出目标边缘，从而实现3%对比度下的目标精确定位；
- 这种算法要进行多尺度运算，所以计算量很大。

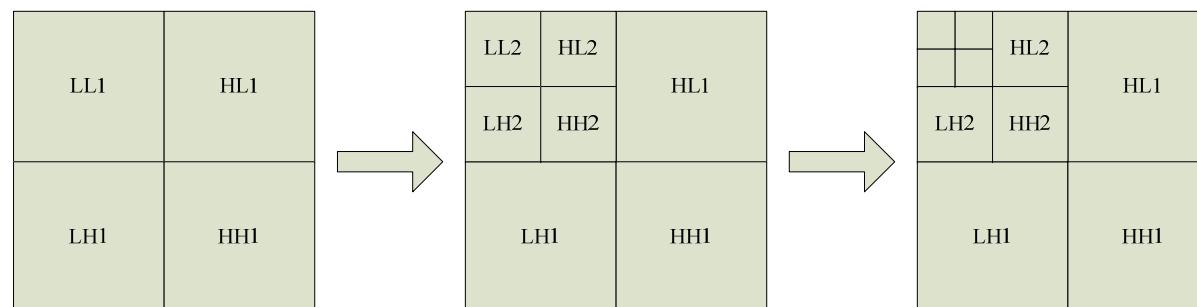


基于小波的去噪方法

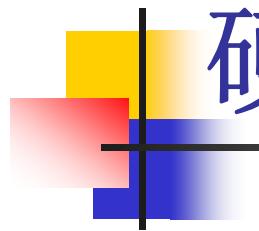
- 高频系数置零的线性去噪方法
- 小波系数硬阈值去噪
- 小波系数软阈值去噪
- 小波系数自适应阈值去噪
- 基于小波模极大值的去噪方法
- 基于信号奇异性的去噪方法
- 基于小波系数相关性的去噪方法

高频系数置零去噪

1. 对噪声图像进行二维离散小波分解，分解层数一般取2或3层，分解过程如下图。
2. 对每一层的高频系数LH， HL， HH， 置零。
3. 对小波系数进行重构。



这是最简单的利用小波变换性质的去噪方法。



硬阈值方法去噪

1. 首先将图像信号求小波变换。
2. 除了最粗尺度信号外，将各细节信号作阈值处理，当某位置小波变换值大于阈值时，保留原值，否则置零。即

$$W^i y_{j,(k,l)} = \begin{cases} W^i y_{j,(k,l)}, & |W^i y_{j,(k,l)}| \geq \lambda \\ 0, & |W^i y_{j,(k,l)}| < \lambda \end{cases}$$

3. 利用小波变换重构，求出信号的滤波值。

软阈值方法去噪

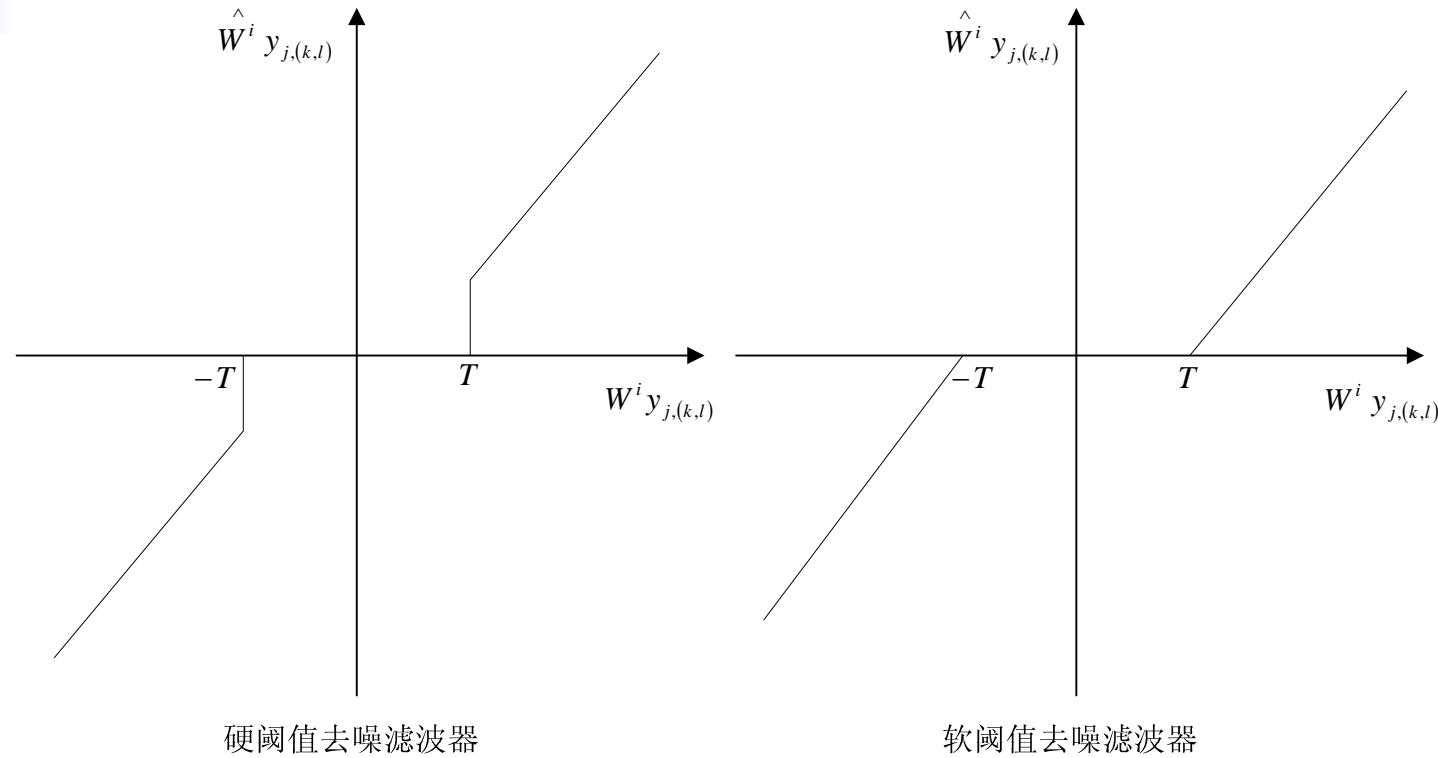
1. 首先对图像信号进行小波变换，得出带有噪声的小波系数。
2. 将各细节信号作阈值处理，当某位置小波变换值大于阈值时，作下面运算，下式中 $\text{sgn}(x)$ 代表符号函数

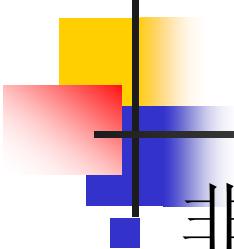
$$W^i y_{j,(k,l)} = \begin{cases} \text{sgn}(W^i y_{j,(k,l)}) * [|W^i y_{j,(k,l)}| - \lambda], & |W^i y_{j,(k,l)}| \geq \lambda \\ 0, & |W^i y_{j,(k,l)}| < \lambda \end{cases}$$

否则置零。

3. 利用小波变换重构，求出信号的滤波值。

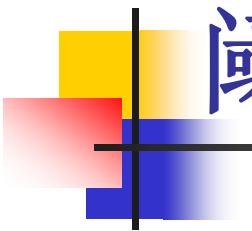
软硬阈值滤波器





非线性软阈值

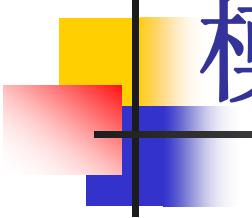
$$W^i y_{j,(k,l)} = \begin{cases} W^i y_{j,(k,l)} - \frac{\lambda}{2^j} & W^i y_{j,(k,l)} > \lambda \\ 0 & W^i y_{j,(k,l)} \leq \lambda \\ W^i y_{j,(k,l)} + \frac{\lambda}{2^j} & W^i y_{j,(k,l)} < -\lambda \end{cases}$$



阈值选取

1. $T = \sigma \sqrt{2 \log n}$
2. $T = 0.3 \sigma \sqrt{2 \log n}$
3. $T = \sigma \sqrt{\frac{2 \log(n)}{n}}$
4. $T = 3\sigma$

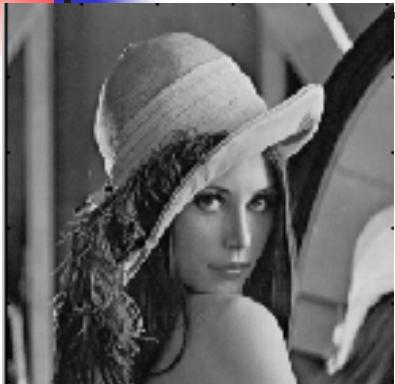
其中，噪声方差的估计为 $\sigma = MAD/0.6745$ ，MAD 为图像中位值，n 为信号采样点数。



模极大值方法去噪

1. 小波系数极大值的确定
2. 图像极大值跟踪
3. 噪声极大值滤除

实验十：利用小波的特性对高频系数置零的去噪方法的仿真实验



原始图像 添加了方差为0.4的高斯噪声的图像 高频系数置零法恢复的图像

实验二：基于阈值的小波去噪方法的仿真实验



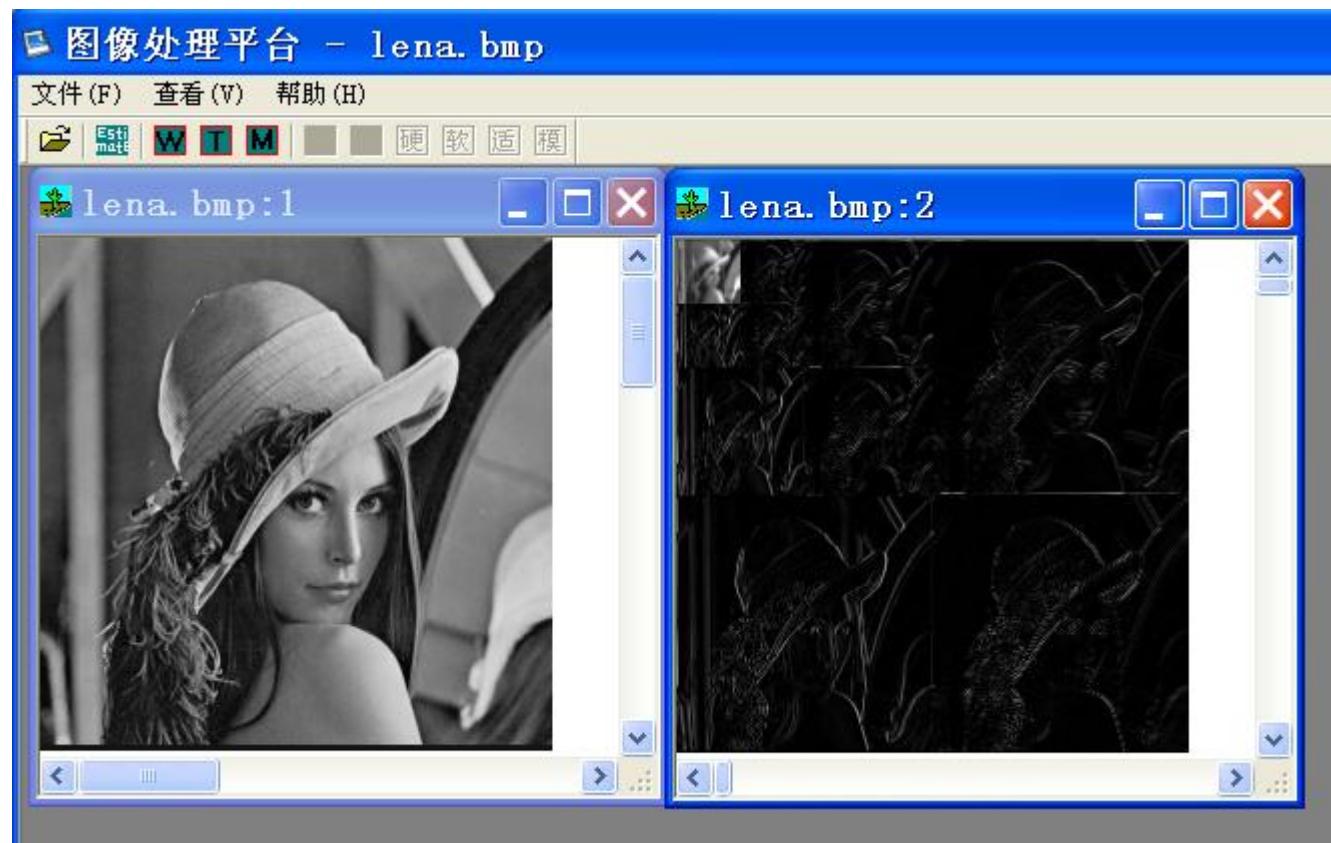
硬阈值法恢复的图像

软阈值法恢复的图像

非线性软阈值法恢复的图像

实验结果

分解



使用3尺度，三次B样条滤波器进行mallat小波分解

实验结果

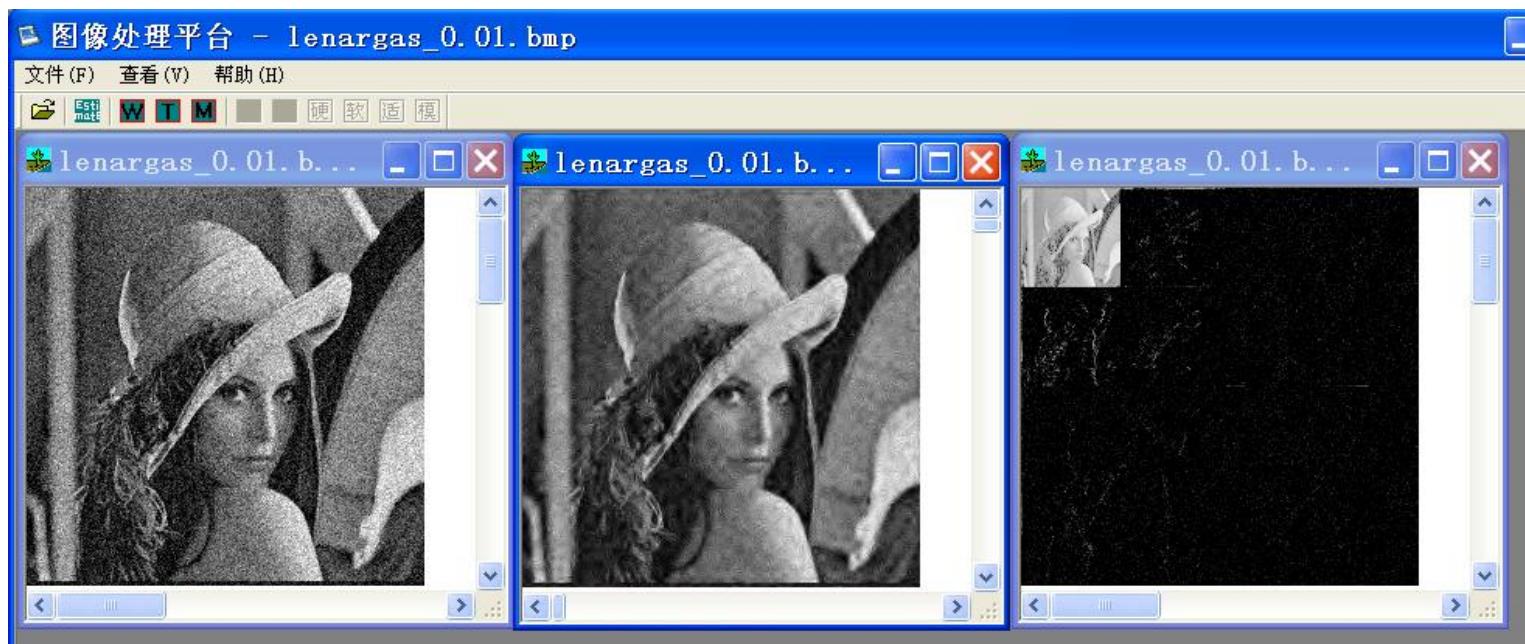
■ 硬阈值去噪



使用2尺度sym8滤波器分解的小波系数进行硬阈值去噪

实验结果

软阈值去噪



使用2尺度sym8滤波器分解的小波系数进行软阈值去噪

实验结果

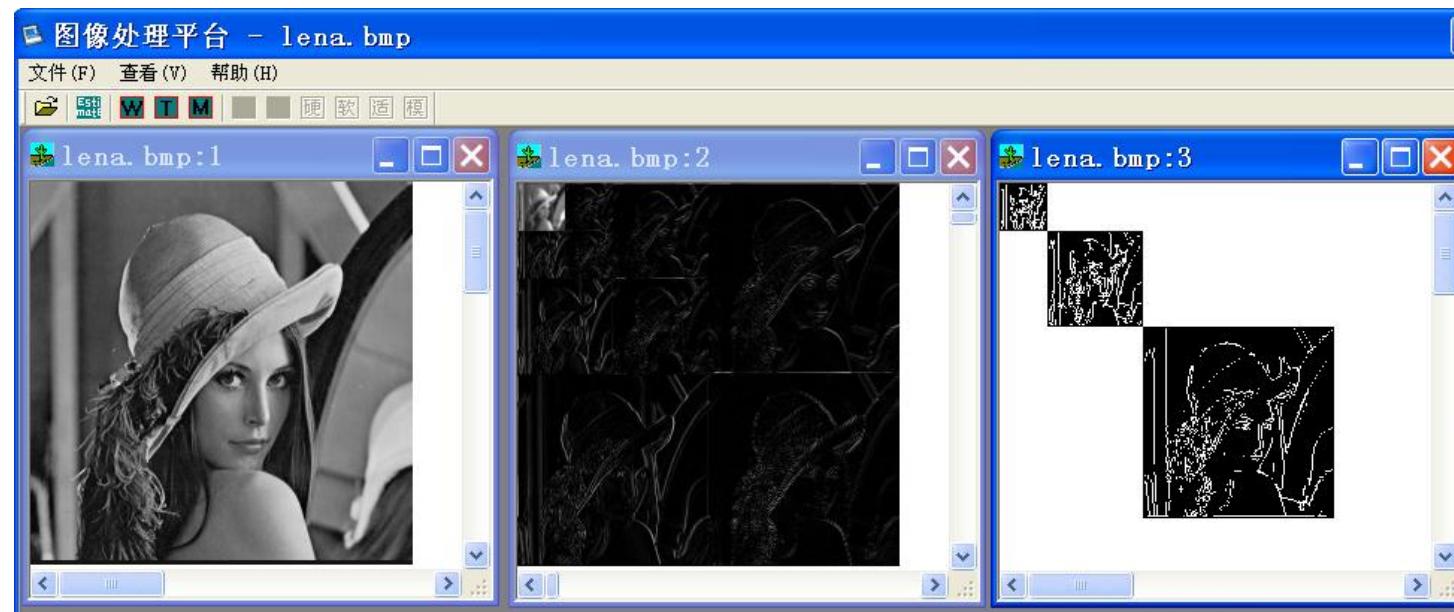
■ 自适应阈值去噪



使用2尺度sym8滤波器分解的小波系数进行自适应阈值去噪

实验结果

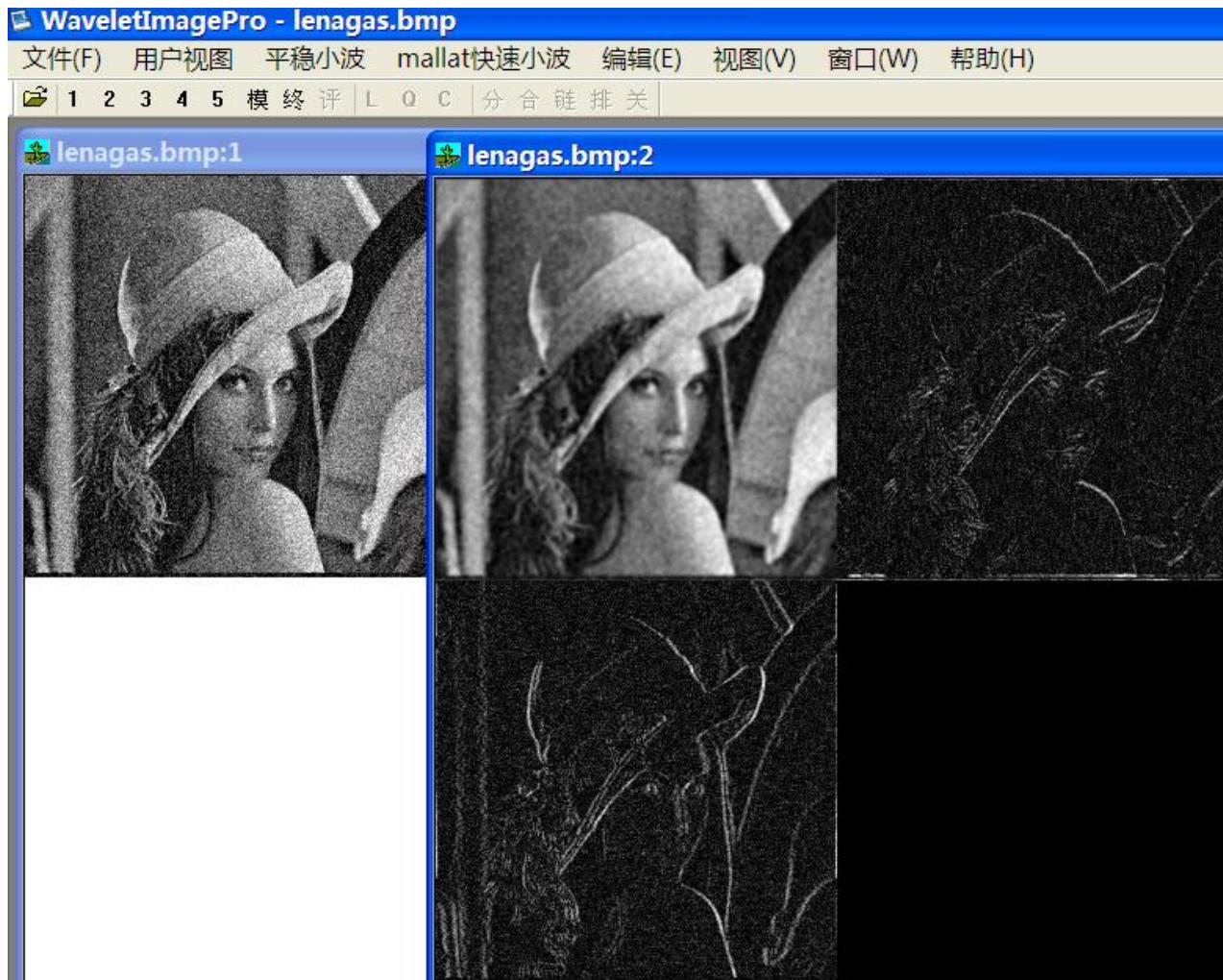
■ 模极大值提取



根据多尺度模极大值分离噪声和边缘

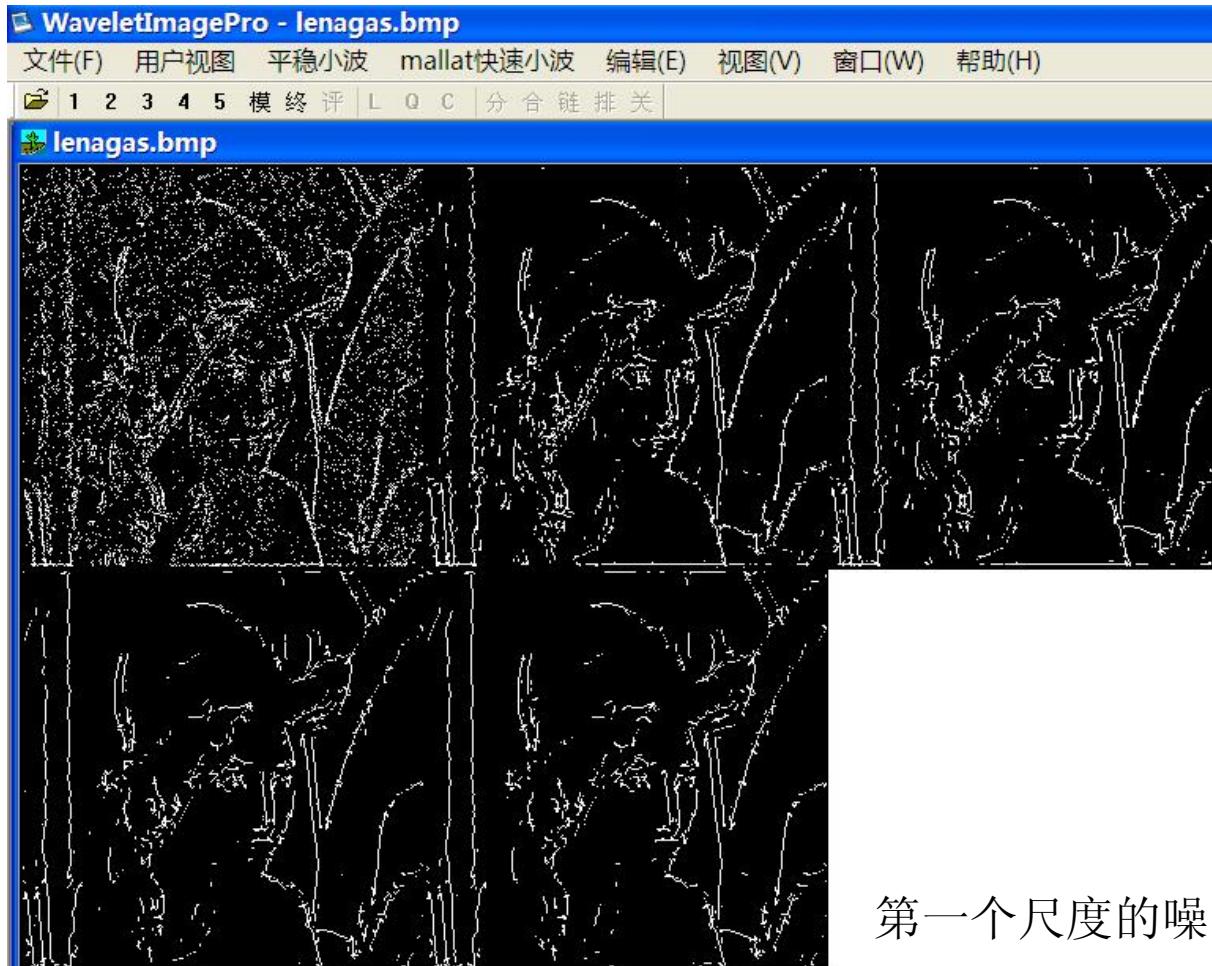
实验结果

■ 平稳小波分解第一尺度小波系数



实验结果

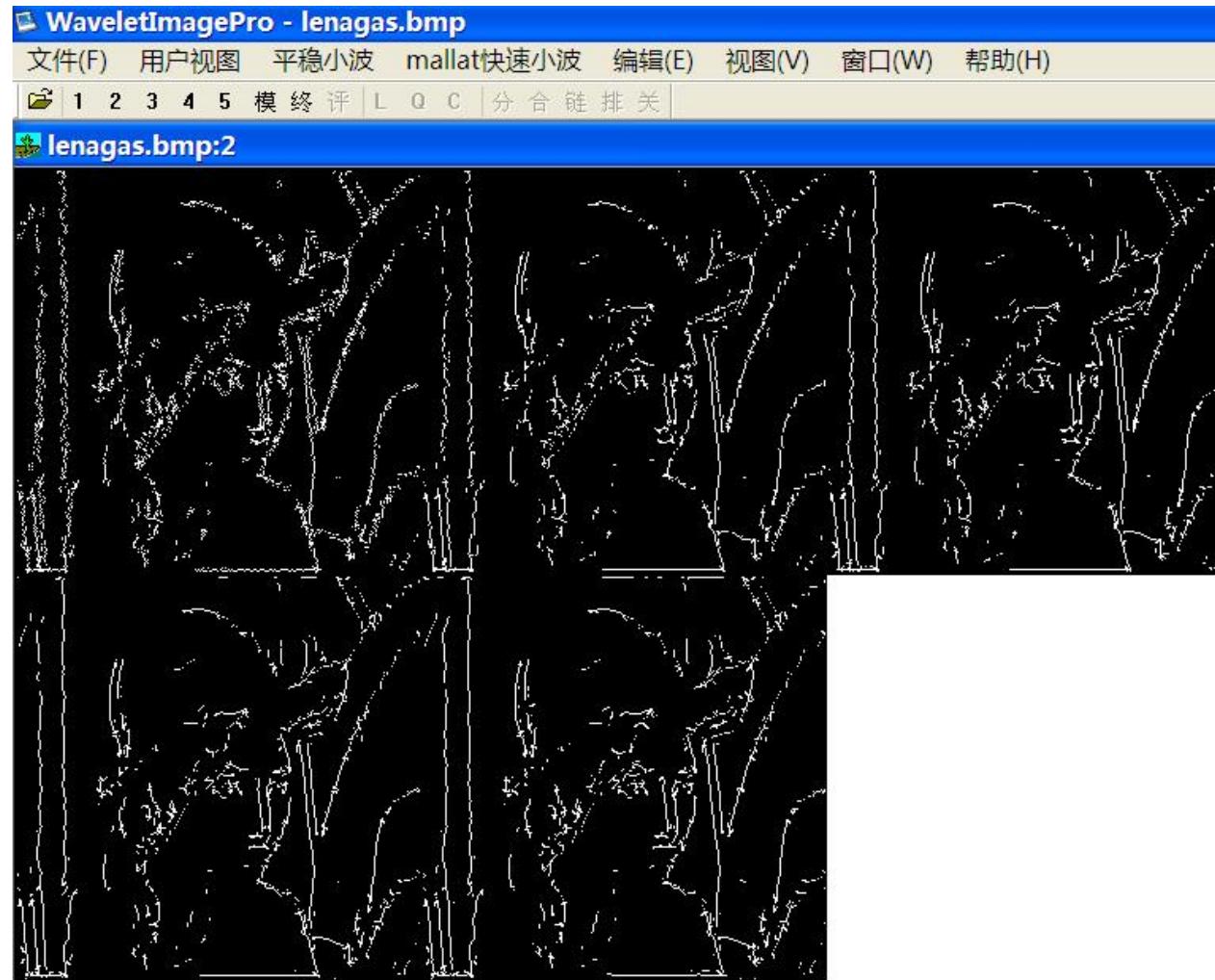
五个尺度的模极大值提取



第一个尺度的噪声很多

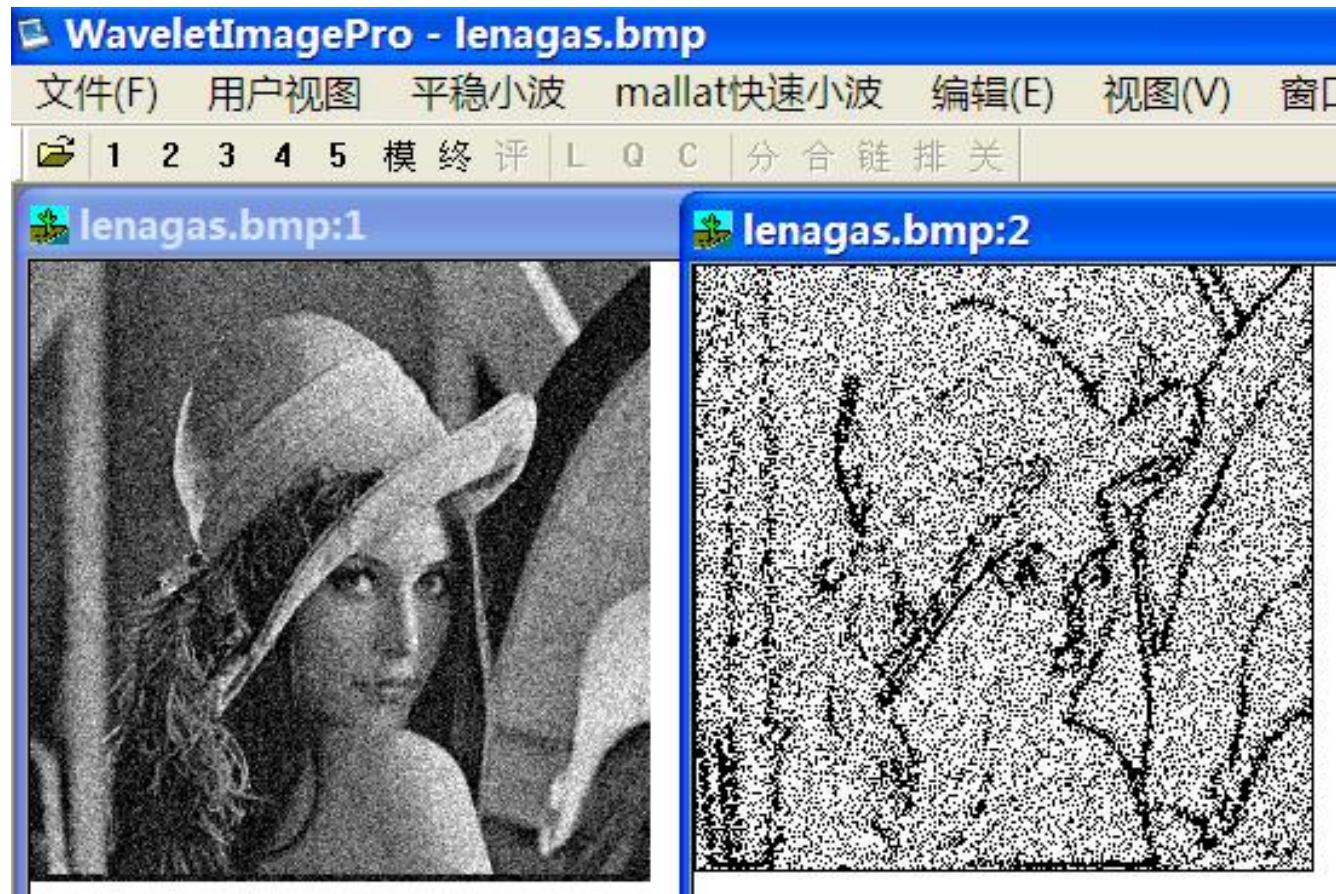
实验结果

■ 多尺度链接后的模极大值



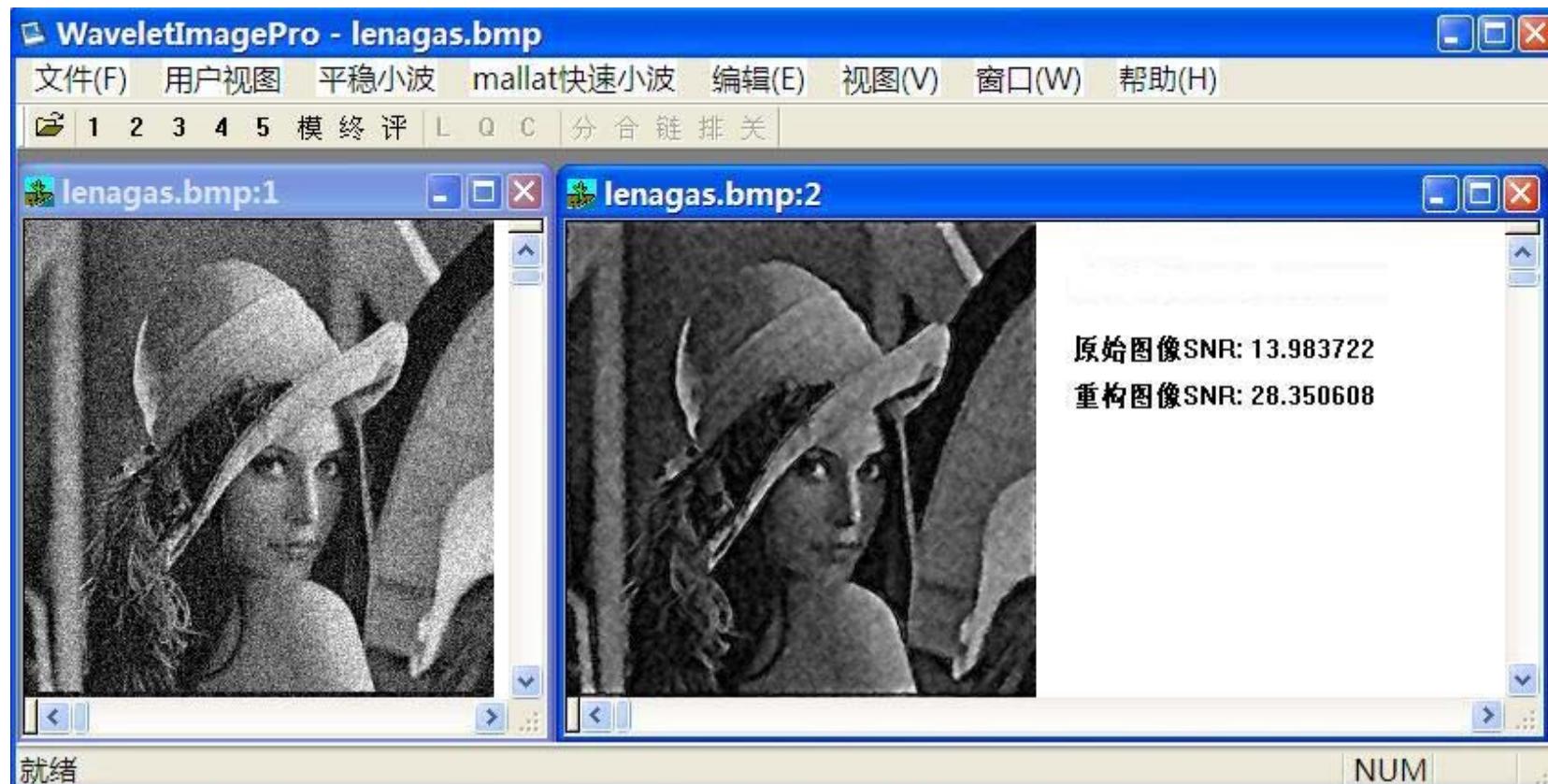
实验结果

■ 第一尺度分离出的噪声矩阵



实验结果

■ 模极大值多尺度链接去噪

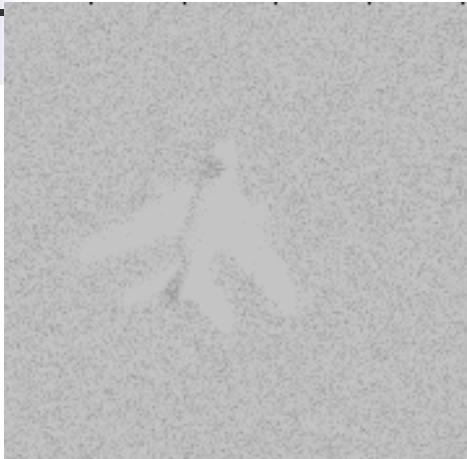
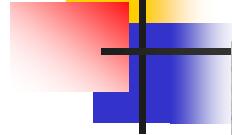


3个尺度,二次B样条滤波器系数分解

❖ 基于边缘提取的去噪和图像增强相结合的实现

1. 对图像进行小波变换
2. 计算小波变换的多尺度模和幅角；
3. 用局部模极大值方法检测出边缘细节点；
4. 利用合适的非线性增益函数增强边缘点，同时去除高频噪声点；
5. 对增强后的小波系数进行小波逆变换得到增强后的图像。

实验一：几种图像增强方法的比较



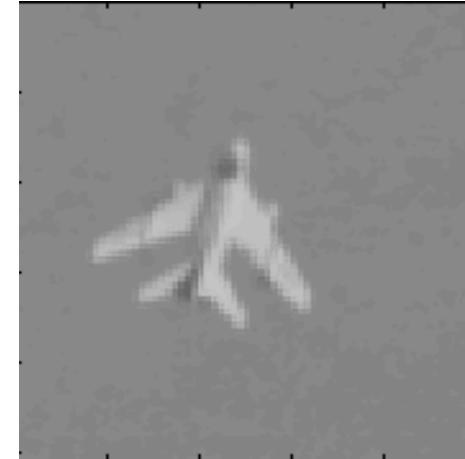
受噪声干扰的低对比度图像



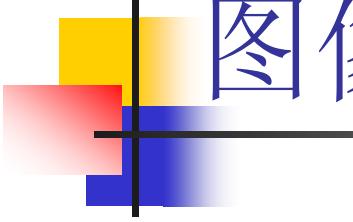
直方图均衡化后的图像



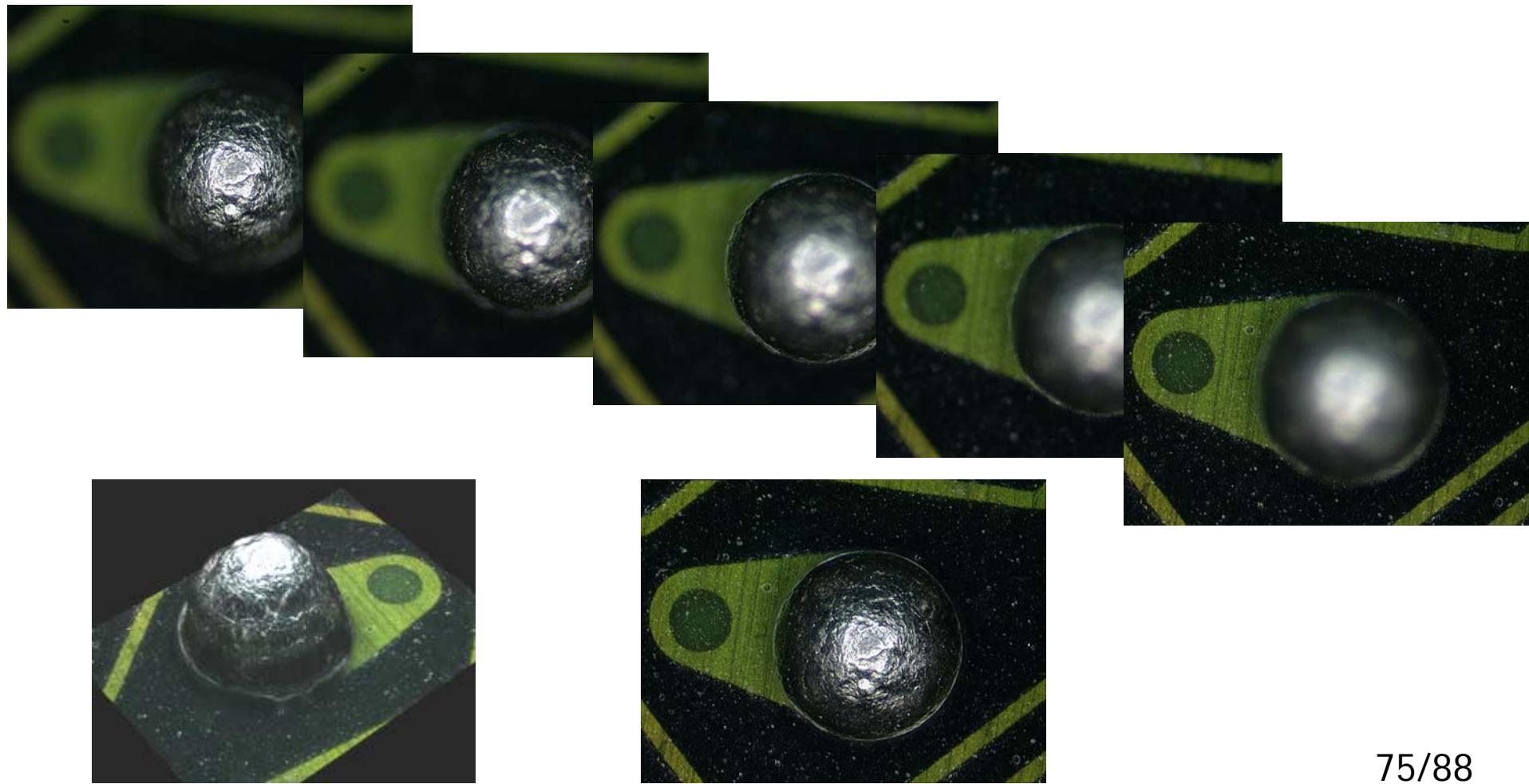
非线性增强后的图像

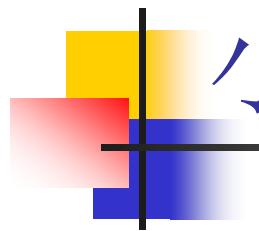


基于小波边缘检测的非线性增强后的图像



图像融合

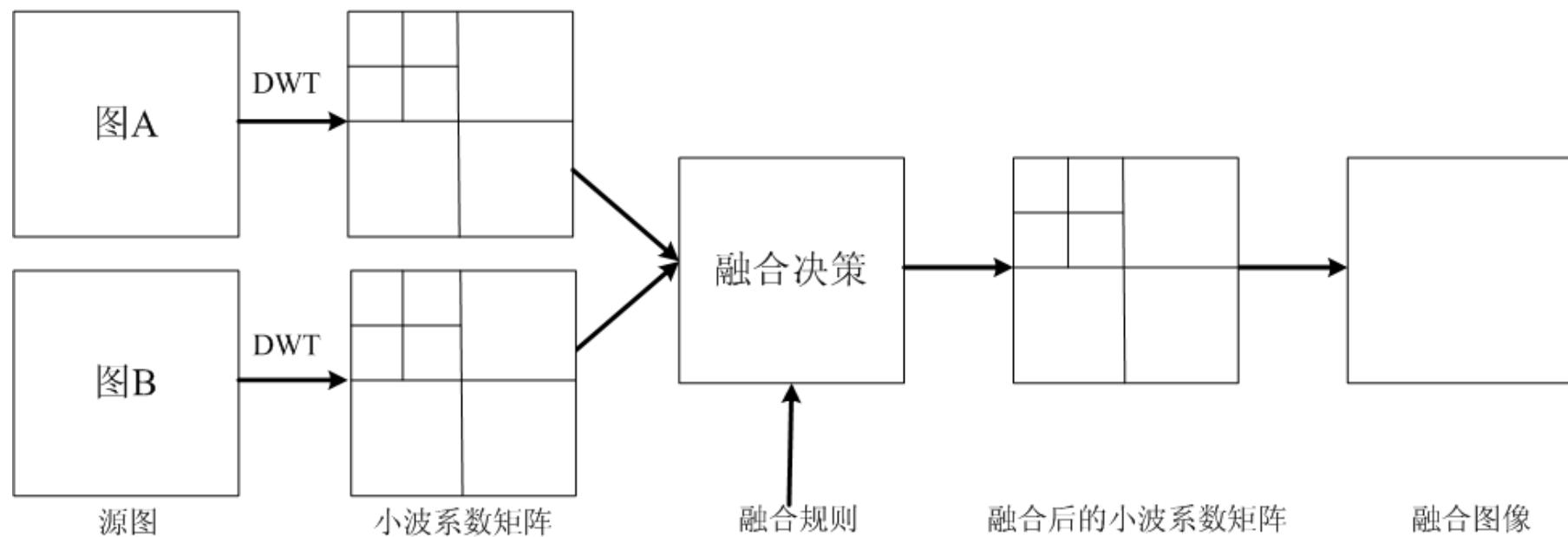




小波图像融合

- 利用小波进行图像融合的基本思想是：
 1. 先对多源图像进行二维小波分解；
 2. 然后在小波变换域内通过比较各图像的细节信息，在不同尺度上实现图像融合，提取出重要的小波系数；（融合法则）
 3. 最后进行小波反变换，得到数据融合之后的图像。

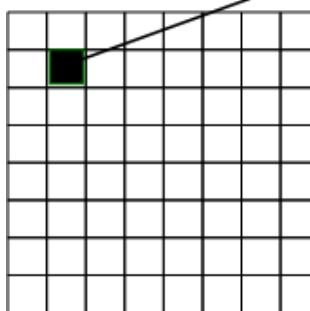
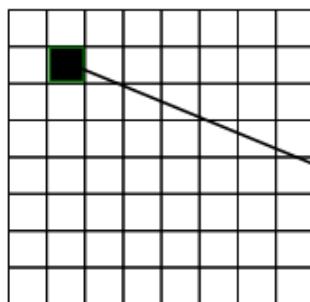
小波图像融合



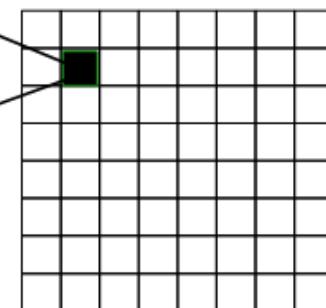
基于小波变换的图像融合过程

像素级融合

源图的小波系数矩阵



融合图像的小波系数矩阵



基于像素的融合规则

- 融合算子的确定
- 低频融合算子

$$A_J = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} A_J^0(k)}{K}$$

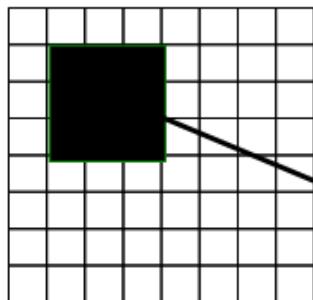
- 高频融合算子

$$D_J^i = \max_K \{ |D_J^i(x, y)| \}$$

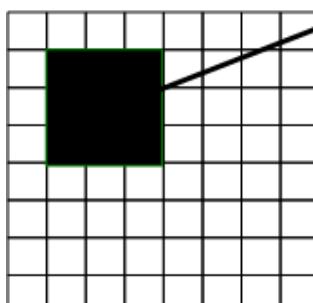
$$i = 1, 2, 3$$

区域融合

源图的小波系数矩阵



融合图像的小波系数矩阵



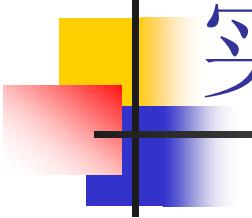
- 融合算子的确定
- 低频融合算子

$$A_J = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} A_J^0(k)}{K}$$

- 高频融合算子

$$D_J^i = \max_K \left\{ \sum_{m=-1}^1 \sum_{n=-1}^1 |D_J^i(x+m, y+n)| \right\}$$
$$i = 1, 2, 3$$

基于区域的融合规则

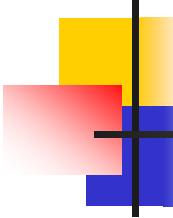


实现中的一些问题

1. 小波基的选取：

■ 通常在设计滤波器时，考虑的主要方面有：

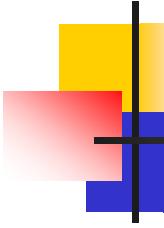
- (1) 紧支撑性(Compact Support): $h(n)$ 的取值范围是有限的，在该取值范围内， $h(n)$ 的值不为零，在该范围以外， $h(n)$ 的值为零。具有紧支撑的小波基收敛速度较快。
- (2) 规则性(Regularity): 即平滑性(Smoothness)或连续性(Continuity)。在图像融合中，若滤波器的规则性较好，则进行重构时的视觉效果较好。
- (3) 对称性(Symmetry): 也称线性相位(Linear Phase)。 $h(n)$ 在时域的对称，在频域上就表现为具有线性相位。



实现中的一些问题

2. 边界延拓问题：

- 实际的图像处理中，由于图像都是有限尺寸的，在把滤波器应用于边界时，存在如何处理边界的问题。比较常用的方法有零延拓、边界重复延拓、周期延拓和对称周期延拓和双对称延拓等。主要目的是要降低边界不连续性所产生的在边界上变换系数衰减慢的问题。



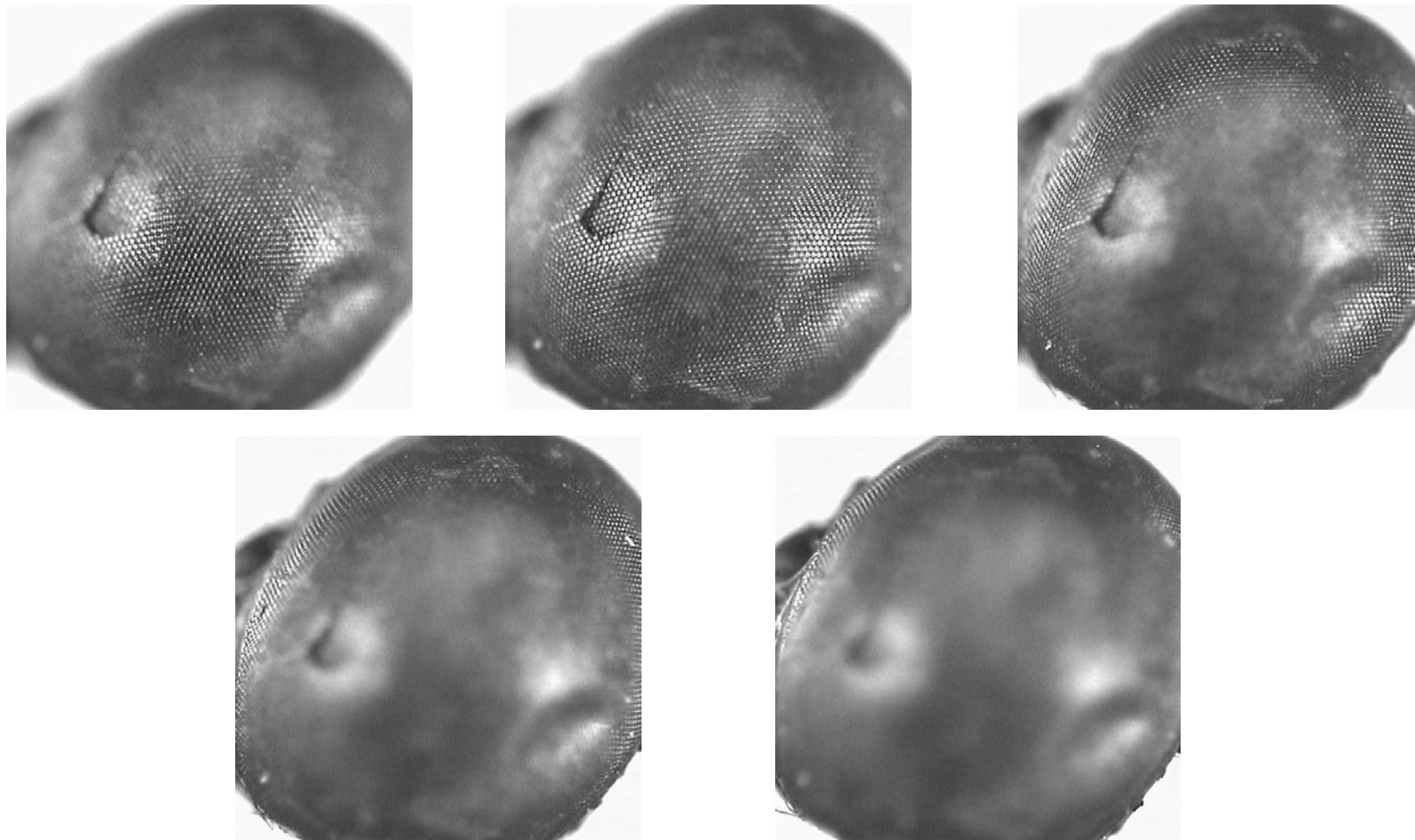
实现中的一些问题

2. 分解层数的选择：

- 小波分解层数 J 的大小与所选用小波函数的光滑度有关, J 选择小, 小波函数光滑度就差, 但运算量小; J 选择大, 小波函数光滑度就好, 融合的频率范围越丰富, 融合结果的细节也就越丰富。但是它的运算量大, 而且分解的层数越多, 顶层融合损失的信息量越大, 均是小波反变换不能恢复的损失, 因此基于小波分解的层数不宜过高。
- 实验证明选择 $J = 3$ 或 $J = 5$ 从融合图像质量来看几乎没有差别, 因此, 我们选择 $J = 3$ 即可以满足要求。

融合效果比较

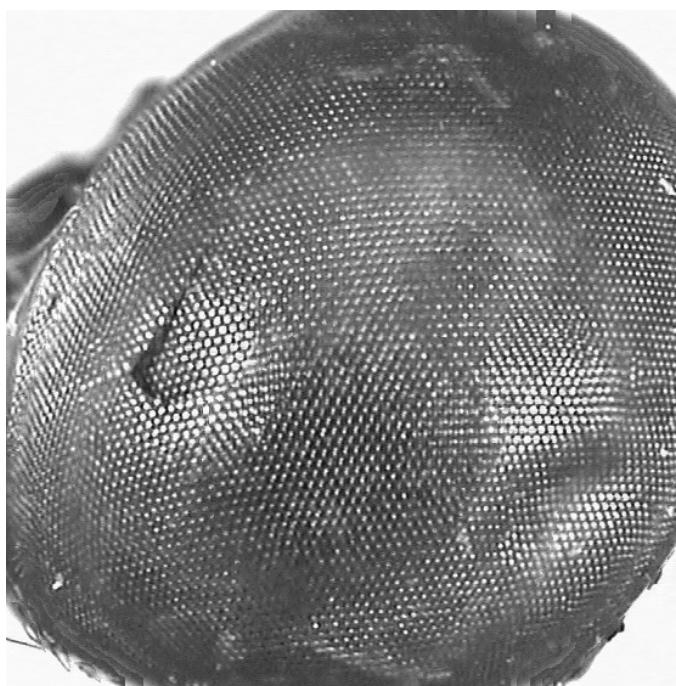
实验一



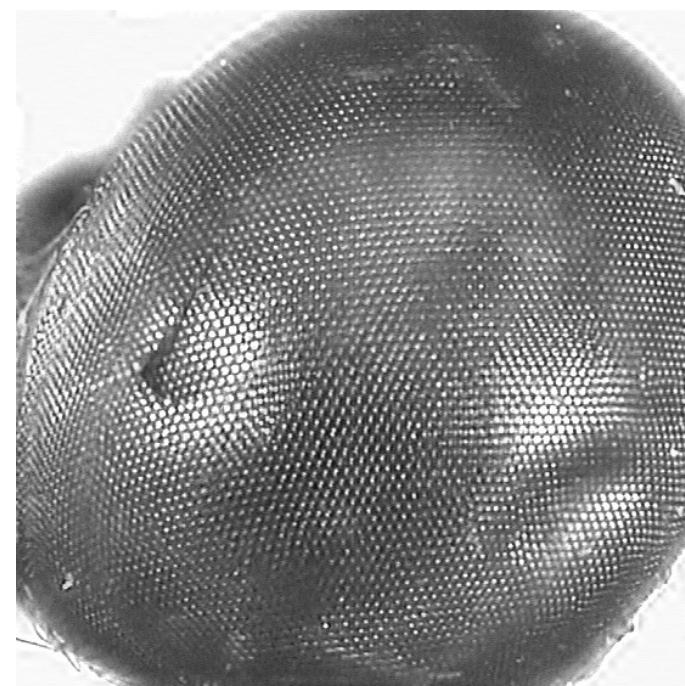
蝴蝶眼睛序列显微图像

融合效果比较

实验一



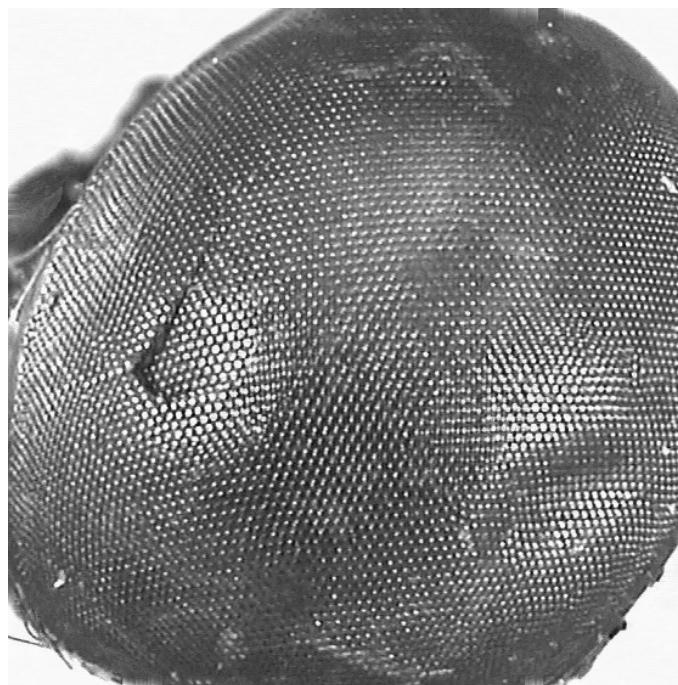
(a) SML方法



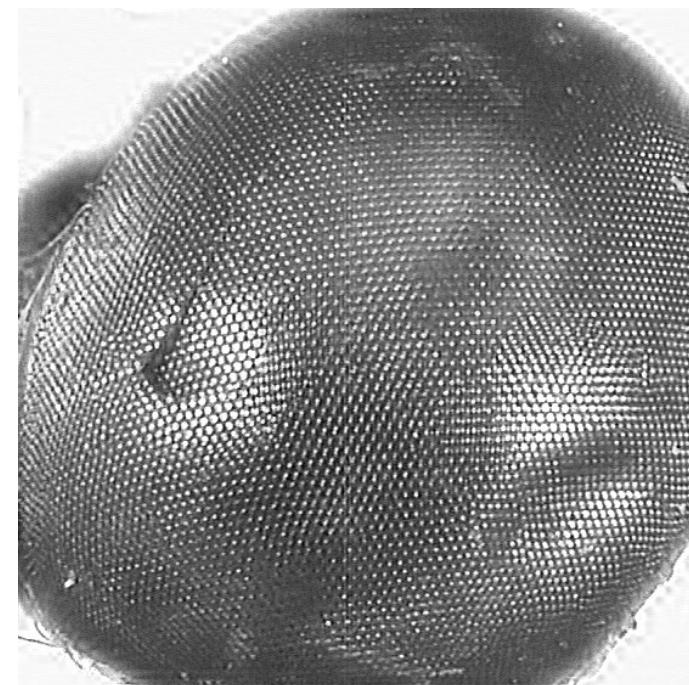
(b) 小波区域融合方法

融合效果比较

实验二



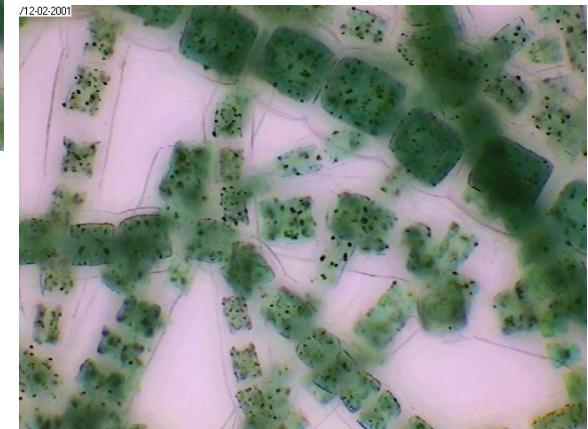
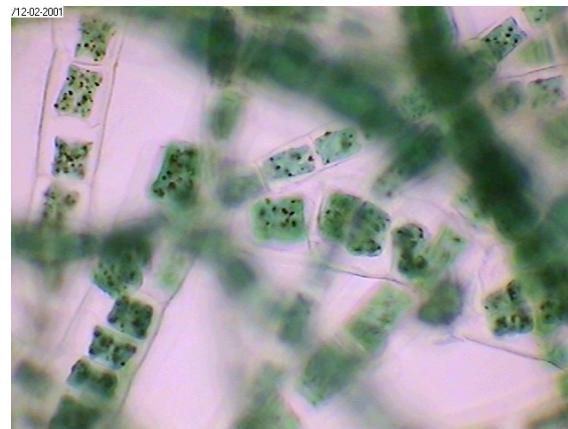
(a) SML方法



(b) 小波区域融合方法

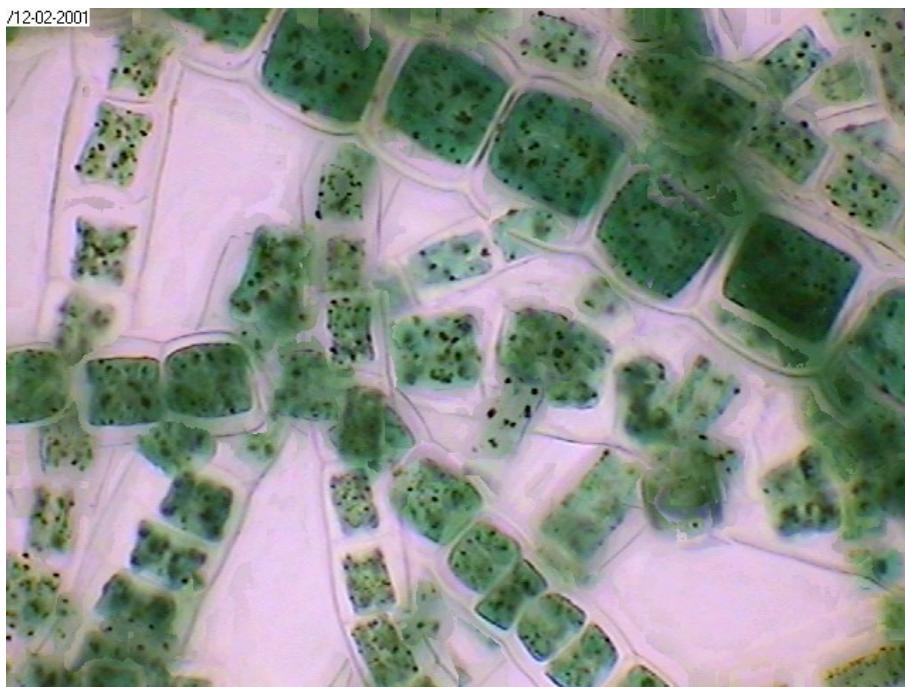
融合效果比较

实验三



融合效果比较

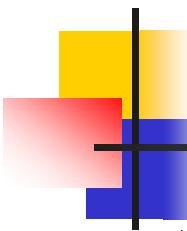
实验三



(a) SML方法

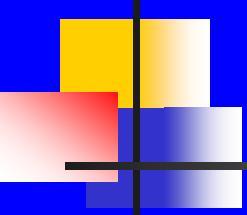


(b) 小波区域融合方法



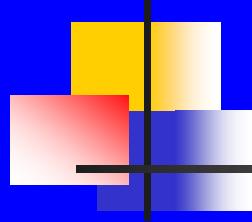
参考书目

- 小波分析及其应用(孙延奎)
- 基于MATLAB的系统分析与设计——小波分析
- 小波变换的工程分析与应用(杨福生)
- 小波分析算法与应用(程正兴)
- A wavelet tour of signal processing
- Ten Lectures on Wavelets



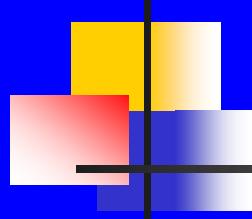
图像可视化编程

- 一、文件输入输出
- 二、bmp文件结构
- 三、demo解析



一、文件输入输出

原则：文件结构事先约定好，按序写，按序读



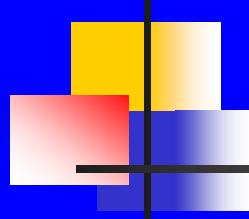
二、 bmp文件结构

BITMAPFILEHEADER

BITMAPINFOHEADER

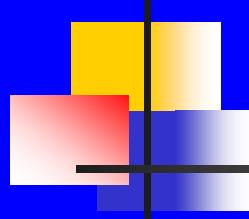
颜色表

Pixel data



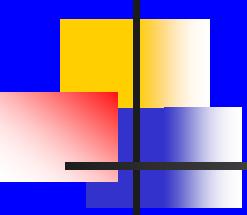
二、 bmp文件结构——BITMAPFILEHEADER

```
Typedef struct tagBITMAPFILEHEADER
{
    WORD    bfType;          /*图像文件型态， 固定为“BMP”*/
    DWORD   bfSize;          /*图像文件大小， 一般不用*/
    WORD    bfReserved1;     /*保留未用*/
    WORD    bfReserved2;     /*保留未用*/
    DWORD   bfOffBits;       /*图像数据的偏移量*/
}BITMAPFILEHEADER;
```



二、 bmp文件结构——BITMAPINFOHEADER

```
Typedef struct tagBITMAPINFOHEADER
{
    DWORD    biSize;           /*本数据结构大小*/
    DWORD    biWidth;          /*象素为单位, 图像宽*/
    DWORD    biHeight;         /*象素为单位, 图像高*/
    WORD     biBitCount;       /*每象素所占比特数*/
    DWORD    biSizeImage;      /*图像字节数的多少*/
    .....
}BITMAPINFOHEADER;
```

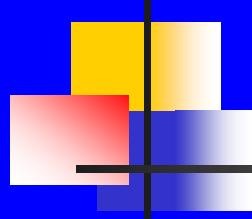


二、bmp文件结构——颜色表

RGBQUAD结构：

```
typedef struct tagRGBQUAD{  
    unsigned char  rgbBlue;  
    unsigned char  rgbGreen;  
    unsigned char  rgbRed;  
    unsigned char  rgbReserved;  
}RGBQUAD;
```

颜色表是一个RGBQUAD结构数组，表项的多少 (数组长度)由图像每像素所占比特数决定，灰度图有256个表项，彩色图无调色板。

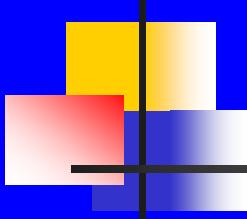


二、bmp文件结构——数据阵列

1、图像每行象素所占字节要补齐4的倍数

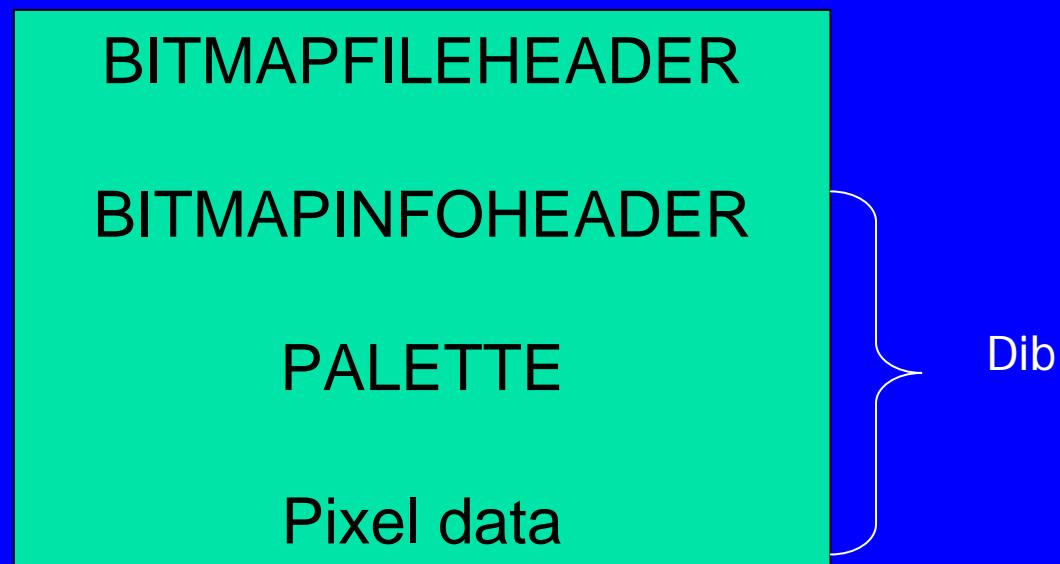
一行象素所占字节数= (biWidth* biBitCount/8+3) /4*4

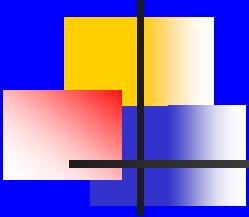
2、存储顺序是从左下角开始



二、bmp文件结构——Dib结构

Dib: Device-Independent bitmap





三、demo解析

1、已经提供的函数

2、文档与视图的关系：

文档对象用来保存数据，视图对象用来显示或修改数据，双方通过 `GetDocument()` 函数实现数据传递。

3、图像变换与显示