

一种基于 QR 分解的观测矩阵优化方法*

周琦宾¹, 吴 静^{1,2}, 余 波¹

(1.西南科技大学 信息工程学院, 四川 绵阳 621000;

2.西南科技大学 特殊环境机器人技术四川省重点实验室, 四川 绵阳 621000)

摘 要: 在压缩感知理论中, 最为关键的问题是观测矩阵的构造。影响图像重建质量的因素包括观测矩阵列向量间的独立性以及观测矩阵与稀疏基间的互相关性。基于此提出了一种优化算法。该算法采用 QR 分解以增大观测矩阵列独立性, 同时对利用等角紧框架(Equiangular Tight Frame, ETF)收缩的 Gram 矩阵进行优化, 通过更新每次梯度下降的方向, 加快收敛速度, 从而减小观测矩阵与稀疏基间的互相关性。仿真实验结果显示, 在信号稀疏度或观测次数相同情况下, 该优化观测矩阵的方法在提高图像重建质量与稳定性方面都有一定优势。

关键词: 压缩感知; 观测矩阵; QR 分解; Gram 矩阵; 互相关性

中图分类号: TN912.3; TP301.6

文献标识码: A

DOI: 10.16157/j.issn.0258-7998.200413

中文引用格式: 周琦宾, 吴静, 余波. 一种基于 QR 分解的观测矩阵优化方法[J]. 电子技术应用, 2021, 47(4): 107-111.

英文引用格式: Zhou Qibin, Wu Jing, Yu Bo. An optimization method of observation matrix based on QR decomposition[J]. Application of Electronic Technique, 2021, 47(4): 107-111.

An optimization method of observation matrix based on QR decomposition

Zhou Qibin¹, Wu Jing^{1,2}, Yu Bo¹

(1.School of Information Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621000, China;

2.Sichuan Key Laboratory of Special Environmental Robotics, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621000, China)

Abstract: In compressed sensing theory, the most critical issue is the construction of the observation matrix. The factors that affect the image reconstruction quality include the independence between the observation matrix column vectors and the cross-correlation between the observation matrix and the sparse basis. Based on this, an optimization algorithm is proposed. The algorithm uses QR decomposition to increase the independence of the observation matrix columns, and at the same time optimizes the Gram matrix contracted using an equiangular tight frame(ETF). By updating the direction of each gradient descent, the convergence rate is accelerated to reduce The cross-correlation between the small observation matrix and the sparse basis. Simulation experiment results show that the method of optimizing the observation matrix in this paper has certain advantages in improving the quality and stability of image reconstruction under the same signal sparsity or observation times.

Key words: compressed sensing; observation matrix; QR decomposition; Gram matrix; cross-correlation

0 引言

压缩感知理论(Compressed Sensing, CS)是一种有别于传统 Shannon-Nyquist 采样定理的信号欠采样理论。该理论指出, 对于稀疏或可压缩信号, 可以通过线性投影的方式将大部分信号的信息投射在低维空间, 然后利用非线性解码的算法将信号恢复到原始状态。

CS 方法被广泛应用于无线通信、模式识别和雷达成像等领域。观测矩阵的设计是 CS 方法的关键研究内容之一, 构造性能良好的观测矩阵对于信号的压缩观测以及重构都起到了至关重要的作用^[1]。现有的文献对观测矩阵的约束条件展开了一系列的探究, 文献[2]中阐

述了限制性等距原则(Restricted Isometry Property, RIP); 文献[3]提出利用零空间性质作为观测矩阵的约束条件, 但由于观测矩阵是否具备约束条件难以准确判断, 往往需要涉及组合复杂度的相关问题, 因此该方法的实际应用具有一定难度。

文献[4]中为有效测量观测矩阵性能, 将矩阵和稀疏基间的互相关性当做衡量标准, 相关性越低, 信号适应的稀疏度范围越大, 精确重建信号所需观测值的数目越少; 文献[5]主要以 Gram 矩阵为基础伪逆求解观测矩阵, 该研究采用了阈值函数, 其中的收缩因子能够根据需要进行调节, 但是这种方法比较耗时, 在收缩过程中可能会产生绝对值较大的相关系数; 文献[6]中 ABOL-GHASEMI V 首次提出利用梯度下降法使得 Gram 矩阵

* 基金项目: 特殊环境机器人技术四川省重点实验室基金项目(13ZXTK07)

逼近单位阵,但是该算法收敛速度较慢并且可能陷入局部最优;文献[7]提出使用矩阵特征值分解对观测矩阵进行优化,将特征值分解后的 Gram 矩阵的特征值取平均值,然后间接优化 Gram 矩阵的非对角线元素,该方法在一定程度上能够降低矩阵的整体互相干性,但是在使用某些恢复算法(如 SP 算法)的情况下,可能无法重建原始信号,在适用范围上有一定的局限性。

文献[8]的研究表明,重构算法要想准确地实现恢复信号的目的,必须满足的条件是使观测矩阵列向量具备一定的线性独立性,而且越强的独立性能够保证重建信号具有越高的质量。

通过梳理相关研究理论,本研究借助于 QR 分解的方式提高观测矩阵列向量的独立性,并将 QR 分解与自适应梯度下降观测矩阵优化算法相结合,提出了一种 Gram 矩阵优化算法,并在实验上对该方法的可行性进行验证。

1 压缩感知理论框架

由 CS 理论,信号 y 能够稀疏表示为:

$$y = \Phi \Psi \alpha = D \alpha \quad (1)$$

其中, $\alpha \in R^{M \times 1}$ 为稀疏信号; $\Psi \in R^{M \times L}$ 为稀疏基; $\Phi \in R^{M \times N}$ 为投影矩阵; $y \in R^{M \times 1}$ 为观测信号。同时 $D = \Phi \Psi$ 为观测矩阵,需要满足限制性等距原则。由于 $M \ll N$,可以同时实现信号压缩和采样,大大减少了采样量,从而降低了数据的传输压力。

把压缩感知理论应用于实践操作,需要从观测到的信号 y 重建原始信号,这被称为信号重建过程,其原始模型为:

$$\alpha = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad \text{s.t.} \quad y = D \alpha \quad (2)$$

然而,对 l_0 范数问题的求解是 NP-hard 的,运算量十分巨大,因此无法在实践中使用。有研究表明,在一定的条件下,可以使用 l_1 范数解代替 l_0 范数解,这两个解等价^[8],如式(3)所示:

$$\alpha = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_1 \quad \text{s.t.} \quad y = D \alpha \quad (3)$$

式(3)是一个凸优化问题,要想获得最优解,可以采用基追踪(BP)算法进行求解。

2 优化算法

目前,现有的观测矩阵几乎都存在一些不足,如随机观测矩阵的不确定性与硬件难以实现性;确定性观测矩阵虽然更易于设计快速算法,但使用其采样时重建信号的质量却差强人意。寻求需要更少观测值且具有较好稳定性的观测矩阵是观测矩阵的研究重点。

为得到更好的重建效果,本文提出了一种基于 QR 分解与自适应梯度下降法相结合的优化方法,以满足观测矩阵与稀疏基础之间的相关性以及观测矩阵列向量间的独立性要求。

2.1 矩阵列向量的独立性与 QR 分解

文献[9]研究表明:观测矩阵的优化可以通过增加矩

阵的最小奇异值来实现,原因在于最小奇异值和列向量具有显著的线性关系,要想增强矩阵列向量的独立性,就要使其最小奇异值较大,此种方法不会改变原矩阵的性质。

QR 分解不仅可以增大矩阵的最小奇异值,而且可以保持该矩阵的其他性质不变^[10]。具体的操作步骤是通过分解矩阵 $A \in R^{M \times N}$ 获得正交矩阵 $Q \in R^{M \times N} (Q^T Q = I)$ 和上三角矩阵 R 的积,也就是 $A = QR$ 。对 R 进行分析,能够看出其对角线元素比非对角线元素大得多,利用这一发现,将 R 的非对角元素设置为零得到 \hat{R} ,得到 A 的还原矩阵: $\hat{A} = \hat{Q} \hat{R}$ 。

经过 QR 分解能够获得列向量独立性强的矩阵 \hat{A} ,所以该方法也能够运用到观测矩阵的优化中。优化过程为:首先设任意观测矩阵为 $\Phi \in R^{M \times N}$;将 Φ 转置为 Φ^T ,对 Φ^T 进行 QR 分解得到 $\Phi^T = QR$;然后将上三角矩阵 R 的非对角线元素置零得到 \hat{R} ;通过关系式 $\hat{\Phi}^T = \hat{Q} \hat{R}$ 求 Φ^T 的转置,得到优化后的观测矩阵 $\hat{\Phi}$ 。经过 QR 分解后, $\hat{\Phi}$ 的最小奇异值大于 Φ 的最小奇异值。

2.2 基于自适应梯度下降法降低相关性

观测矩阵设计的目的是压缩和采样信号,并确保可以从观测值中准确恢复原始信号。设观测矩阵 Φ 、稀疏基 Ψ ,对矩阵 $D = \Phi \Psi$ 进行列单位化处理,得到 \tilde{D} ,文献[4]的研究表明,观测矩阵的性能可以通过观测矩阵与稀疏基之间的相关数来评估,并给出了观测矩阵与稀疏基之间的相关系数定义:

$$\mu(D) = \max \left\{ \frac{|d_i^T d_j|}{\|d_i\| \cdot \|d_j\|} \right\} = \max \left\{ \left| \tilde{d}_i^T \tilde{d}_j \right| \right\} \quad (4)$$

式中, d_i 与 $\tilde{d}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 分别表示矩阵 D 与 \tilde{D} 的列向量。设 $G = \tilde{D}^T \tilde{D}$,则称 G 为 Gram 矩阵。

现有理论表明,相关系数 $\mu(D)$ 越小,被观测信号中包含的信息就越多^[5]。互相关数的最佳情况是零,但无法达到该值。它有一个下限 μ_E ,即 Welch 界:

$$\mu(D) \geq \mu_E = \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}}, \quad D \in R^{M \times N} \quad (5)$$

由式(5)知, Welch 界的大小与 N 和 M 的长度有关。当观测信号长度 M 和原始信号长度 N 满足式(6)的条件时,互相关系数能够达到 Welch 界^[11]。

$$N \leq \frac{M(M+1)}{2} \quad (6)$$

等角紧框架(ETF)是一种特殊的 Gram 矩阵^[12],其对角线元素的值均是 1,非对角线元素为 μ_E 。所以要想将观测矩阵和稀疏矩阵的互相关性尽可能地接近等角紧框架,要得到对 Gram 矩阵进行优化后的矩阵 G_{opt} ,需要求解式(7)。

$$G_{opt} = \arg \min_{G \in H_p} \|G - D^T D\|_F \quad (7)$$

式中, H_μ 是一个凸集, $H_\mu \{H \in R^{N \times N}; H=H^T; \text{diag } H=1, \max_{i \neq j} |h_{ij}| \leq \mu_G\}$; $\mu_G = \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}}$; $\|\cdot\|_F$ 表示 F 范数。

进一步, 通过式(8)求得优化的观测矩阵 D_{opt} 。

$$D_{\text{opt}} = \arg \min \|G_{\text{opt}} - D^T D\|_F \quad (8)$$

定义 $f(D) = \|G_{\text{opt}} - D^T D\|_F$, 则有:

$$\nabla f(D) = \frac{\partial f(D)}{\partial D} = D(D^T D - G_{\text{opt}}) \quad (9)$$

用梯度下降法求解 D_{opt} , 同时完成 D 的更新^[13], 计算方法如式(10)所示:

$$D_{k+1} = D_k - \lambda \cdot \nabla f(D) \quad (10)$$

其中, 梯度用 $\nabla f(D)$ 表示, 步长用 λ 表示。共轭梯度的带入能够有效减少迭代次数, 同时对每次梯度下降的方向进行更新能够加快收敛的速度, 这称为自适应梯度下降算法^[14]。

2.3 观测矩阵优化

为了获得与稀疏基相关性较小且列独立性更高的观测矩阵, 文中将 QR 分解算法与自适应梯度下降法相结合, 提出一种压缩感知中观测矩阵的优化算法, 该优化算法首先利用高斯矩阵构造 Gram 矩阵, 然后利用等角紧框架收缩 Gram 矩阵并建立一个无约束凸优化问题, 矩阵求解采用的方法是自适应梯度下降法, 为提高列向量间的独立性再对其进行 QR 分解, 现将具体的步骤简述如下。

观测矩阵优化算法的初始化涉及的变量包括: 稀疏基 Ψ , 随机高斯矩阵 Φ , 观测矩阵 $D = \Phi\Psi$, 阈值 μ_G , 迭代次数 K_1, K_2 , 搜索步长 λ , 约束系数 $\beta, l=0$ 。

(1) 对 Gram 矩阵进行计算, 通过列单位化由 D 得到 \tilde{D} , 且 $\tilde{G} = \tilde{D}^T \tilde{D}$; 在此基础上通过矩阵更新由 \tilde{G} 得到 G_μ :

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ \hat{g}_{ij} & \text{abs}(\hat{g}_{ij}) < \mu_G \\ \mu_G \cdot \text{sign}(\hat{g}_{ij}) & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

(2) 由式(10)计算初始下降方向 $d_0 = -\nabla f(D)$, 初始化 $L=0$; 更新 $D_{L+1} = D_L + \lambda \cdot d_L$; 更新下一次下降方向 $d_{L+1} = -\nabla f_{L+1} + \beta \cdot d_L$; 更新 $d_L = d_{L+1}, D_L = D_{L+1}$;

(3) $L=L+1$, 若 $L=K_2$, 则执行步骤(4), 否则继续更新 $D_{L+1} = D_L + \lambda \cdot d_L$;

(4) $l=l+1$, 如果 $l=K_1$, 则计算: $\Phi_{K_1-1} = D_{K_1-1} \Psi^{-1}$, 否则执行步骤(1);

(5) 将优化后的观测矩阵 $\Phi = \Phi_{K_1-1}$ 转置为 Φ^T , 对 Φ^T 进行 QR 分解得到 $\Phi^T = QR$;

(6) 对 R 非对角线上元素都置零得到 \hat{R} 。由 $\hat{\Phi}^T = Q\hat{R}$ 求 $\hat{\Phi}^T$ 的转置, 得到 Φ_{k+1} 。

(7) 输出观测矩阵 Φ 。

3 实验与分析

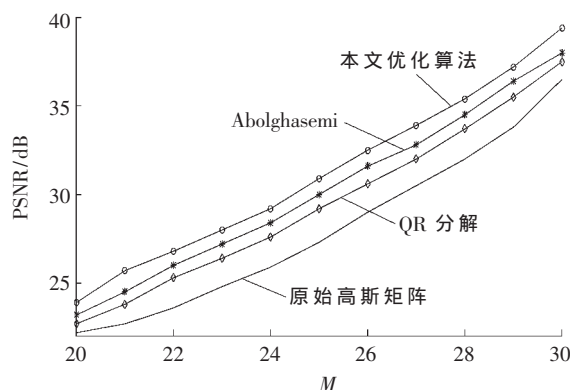
分别采用 QR 分解算法、文献[5]中 Abolghasemi 优化

算法与本文提出的优化算法进行对比试验, 以验证本研究中所设计的算法的性能。测试环境: MATLAB R2016a, 英特尔 i5-4210U, 内存为 4 GB。

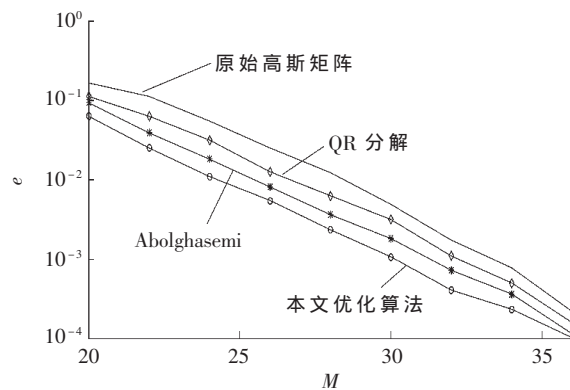
3.1 一维信号采样与重建

首先, 使用随机排列(Randperm)的方法生成 25 组长度的 $n=200$ 的一维稀疏信号, 其中, 初始投影矩阵为高斯随机矩阵, 稀疏字典为 DCT 变换矩阵, 重构算法为 OMP 算法。

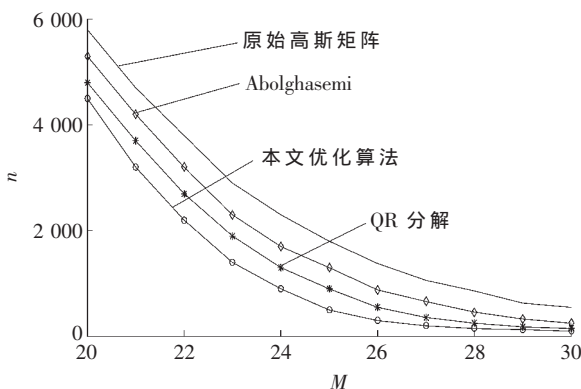
图 1 给出了在相同稀疏度下($K=4$), 原始高斯矩阵、QR 分解算法、Abolghasemi 优化算法和本文提出的优化算法对稀疏信号重建质量的影响。图 1(a)显示了不同优



(a) 峰值信噪比



(b) 重建相对误差



(c) 重建错误个数

图 1 不同观测值下各算法重建信号的性能比较

化算法对稀疏信号重建的峰值信噪比(PSNR),能够看出基于不同算法的稀疏信号重建的峰值信噪比随着观测值的增加而增加。在观测值 M 个数较高情况下,未优化的原始高斯矩阵峰值信噪比最低,本文优化算法重建稀疏信号的峰值信噪比相对 QR 分解与 Abolghasemi 优化算法分别提高了 1.9 dB 和 1.4 dB。根据图 1(b)和图 1(c)中展示的情况可以看出:将稀疏度和信号长度控制在固定水平,基于不同算法的稀疏信号重建的误差以及错误个数会随着观测值的增加而降低,本文所采用的优化算法是 4 种算法中误差及错误个数最低的一种。

针对不同观测矩阵优化算法对信号稀疏度的适应性进行研究,分别确定观测值 $M=30$ 、稀疏度 $M \in [2, 8]$,在此基础上得出的基于 4 种算法重建信号的质量随稀疏度变化曲线如图 2 所示。

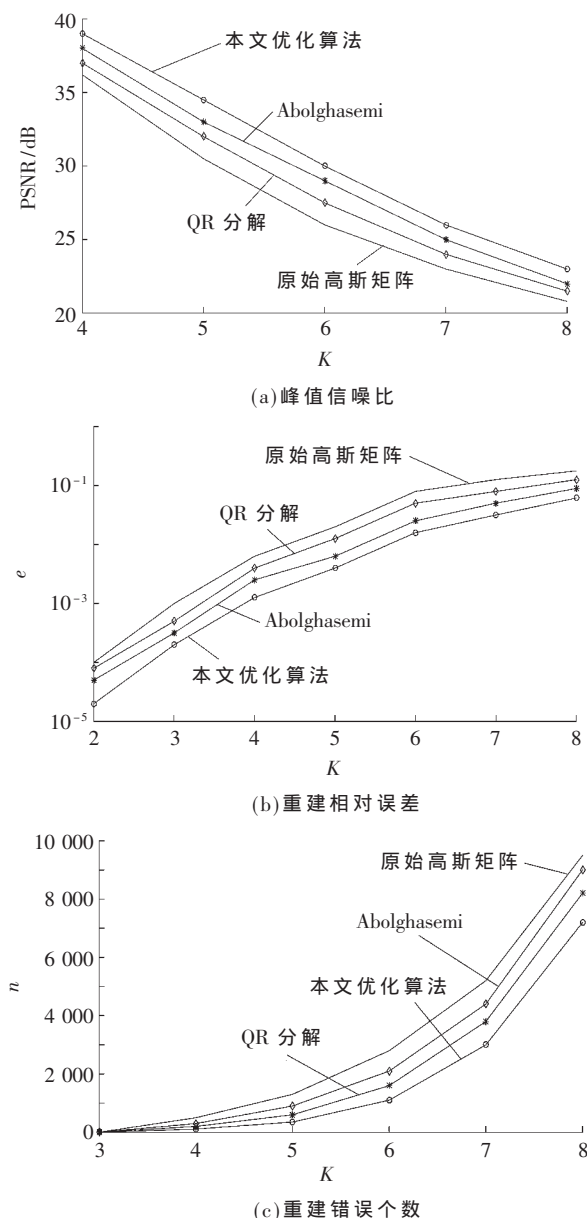


图 2 不同稀疏度下各算法重建信号的性能比较

由图 2 可以看出,当信号长度和观测值个数 M 固定时,随着稀疏度的增加,相对峰值信噪比、重建误差以及重建错误个数都在变差,表明稀疏度越差,重建难度越大,重建精度越低。从图 2(a)可知,在稀疏度 $K=5$ 情况下,相较于 QR 分解算法、Abolghasemi 优化算法,本文采用的观测矩阵优化算法重建信号的峰值信噪比平均提高了 1.5 dB。

3.2 二维图像采样与重建

在本节中,对二维图像的压缩感知采样和重建效果进行测试。采用分辨率为 256×256 的标准灰度图像 CameraMan 用作测试对象。首先把灰度图像归一化后,将其转换为 65536×1 的列向量,观测率为 50%,即投影矩阵为 32768×32768 。与上一小节类似,分别采用未优化、QR 分解优化、Abolghasemi 算法优化和本文算法优化后的高斯矩阵进行采样,然后使用 OMP 算法进行重建。实验结果如图 3、表 1 所示。



图 3 不同算法优化观测矩阵后的重建图像

表 1 优化前后重建参数比较

| 观测矩阵 | 峰值信噪比/dB | 相对误差 | 重建时间/s |
|--------------|----------|-------|--------|
| 原始高斯矩阵 | 23.375 | 0.128 | 29.802 |
| QR 分解优化 | 24.677 | 0.107 | 5.082 |
| Abolghase 优化 | 24.964 | 0.109 | 6.591 |
| 本文算法优化 | 27.289 | 0.082 | 1.657 |

由图 3 可以看出,在观测值的 50% 下,原始高斯矩阵、QR 分解优化算法、Abolghasemi 优化算法和本文优化算法都可以完整重建原图。然而,经过本文算法重建的图像部分噪点更少,整体细节方面更清晰,重建效果更好。表 1 给出了重建图像的峰值信噪比与相对误差的比较,其中,相对误差 $r_e = \|X - X'\|_F / \|X\|_F$, X 为原图像, X' 为重建图像, $\|\cdot\|_F$ 为 Frobenius 范数。从表 1 的数值上可以看出,经过本文算法优化后的观测矩阵重建的图像峰值信噪比较高,相对误差最低。

4 结论

通过对已有的压缩感知观测矩阵算法进行优化,本文提出一种结合 QR 分解与自适应梯度下降的观测矩阵优化算法,获得了性能较优的观测矩阵。该矩阵具有较高的列独立性,并且与稀疏基之间具有较低的互相关性。实验结果表明了该算法的有效性,并在重建质量方面有较大的优势。后期的研究工作将着力于进一步降低算法的复杂度,提高重建信号的效率。

参考文献

- [1] 胡行华,史明洁.帐篷混沌序列稀疏测量矩阵构造[J].传感器与微系统,2017,36(7):50-54.
- [2] CANDÈS E J.The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J].Comptes Rendus Mathématique,2008,346(9-10):589-592.
- [3] DONOHO D L,ELAD M.Optimally sparse representation in general(nonorthogonal) dictionaries via L1 minimization[J].Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,2003,100(5):2197-2202.
- [4] GRIBONVAL R,NIELSEN M.Sparse representations in unions of bases[J].IEEE Transactions on Information Theory,2004,49(12):3320-3325.
- [5] ELAD M.Optimized projections for compressed sensing[J].IEEE Transactions on Signal Processing,2007,55(12):5695-5702.
- [6] ABOLGHASEMI V,FERDOWSI S,SANEI S.A gradient-based alternating minimization approach for optimization of

the measurement matrix in compressive sensing[J].Signal Processing,2012,92(4):999-1009.

- [7] 赵瑞珍,秦周,胡绍海.一种基于特征值分解的测量矩阵优化方法[J].信号处理,2012(5):49-54.
- [8] DONOHO D L.Method and apparatus for compressed sensing: US 2010.Compressed sensing[J].IEEE Transactions on Information Theory,2006,52(4):1289-1306.
- [9] SZAREK S J.Condition numbers of random matrices[J].Journal of Complexity,1991,7(2):131-149.
- [10] DONOHO D L.Compressed sensing[J].IEEE Transactions on Information Theory,2006,52(4):1289-1306.
- [11] 李昕艺,刘三阳,谢维.基于共轭梯度法的感知矩阵优化方法[J].浙江大学学报(理学版),2019,46(1):18-24.
- [12] 孙超.基于后验信息和单位范数紧框架的图像测量矩阵优化[D].重庆:重庆邮电大学,2020.
- [13] 沈子钰,汪立新.步长自适应的测量矩阵迭代优化方法[J].计算机工程与应用,2019,55(1):272-276.
- [14] 蒋伊琳,佟岐,张荣兵,等.自适应梯度下降观测矩阵优化算法[J].计算机应用研究,2017,34(7):1950-1952.

(收稿日期:2020-05-23)

作者简介:

周琦宾(1995-),男,硕士研究生,主要研究方向:压缩感知、SAR 图像处理。

吴静(1963-),通信作者,女,副教授,主要研究方向:目标识别、感知技术和智能算法等,E-mail:1320958927@qq.com。

余波(1996-),男,硕士研究生,主要研究方向:图像检测。

(上接第 100 页)

specific languages in a multi-domain cloud platform[C].European Conference on Modelling Foundations and Applications,2014.

- [14] SHUE D,FREEDMAN J M,SHAIKH A.Performance isolation and fairness for multi-tenant cloud storage[C].Proceedings of the 10th USENIX Conference on Operating Systems Design and Implementation, ser. OSDI'12.Berkeley,

CA, USA:USENIX Association,2012.

- [15] HUBER N.Evaluating and modeling virtualization performance overhead for cloud environments[C].Closer-International Conference on Cloud Computing & Services Science.DBLP,2011.

(收稿日期:2020-06-04)

作者简介:

陈海(1986-),男,硕士研究生,高级工程师,主要研究方向:工控软件、嵌入式系统、智能制造。

(上接第 106 页)

(收稿日期:2020-05-26)

作者简介:

顾能华(1978-),男,硕士研究生,中级实验师,主要研

究方向:计算机科学、嵌入式系统、电器智能化。

侯银银(1987-),女,硕士研究生,中级工程师,主要研究方向:电力系统数据分析、无功补偿。

韩雪龙(1988-),男,硕士研究生,初级实验师,主要研究方向:电力电子与电力传动。

版权声明

经作者授权，本论文版权和信息网络传播权归属于《电子技术应用》杂志，凡未经本刊书面同意任何机构、组织和个人不得擅自复印、汇编、翻译和进行信息网络传播。未经本刊书面同意，禁止一切互联网论文资源平台非法上传、收录本论文。

截至目前，本论文已经授权被中国期刊全文数据库（CNKI）、万方数据知识服务平台、中文科技期刊数据库（维普网）、DOAJ、美国《乌利希期刊指南》、JST 日本科技技术振兴机构数据库等数据库全文收录。

对于违反上述禁止行为并违法使用本论文的机构、组织和个人，本刊将采取一切必要法律行动来维护正当权益。

特此声明！

《电子技术应用》编辑部

中国电子信息产业集团有限公司第六研究所